DES METHODES DANS LES SCIENCES DE RAISONNEMENT PAR J. M. C...

DES

MÉTHODES

DANS LES

SCIENCES DE RAISONNEMENT,

Par M. J.-M.-C. DUHAMEL.

QUATRIÈME PARTIE

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER

Quai des Augustins, 55.

—

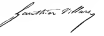
1870

DES

MÉTHODES

DANS LES

SCIENCES DE RAISONNEMENT.



PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

DES

MÉTHODES

DANS LES

SCIENCES DE RAISONNEMENT,

PAR M. J.-M.-C. DUHAMEL,

Membre de l'Institut (Académie des Sciences),
Membre correspondant de l'Académie de Berlin, de l'Académie de Saint-Pétersbourg,
de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou,
de la Société royale Danoise des Sciences de Copenhague, de l'Académie des Nuovi Lincei,
de la Société Philomatique



QUATRIÈME PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55

1870

QUATRIÈME PARTIE.

APPLICATION

DES

MÉTHODES GÉNÉRALES

A LA

SCIENCE DES FORCES.

TABLE DES MATIÈRES.

QUATRIÈME PARTIE.

APPLICATION DES MÉTHODES GÉNÉRALES A LA SCIENCE DES FORCES.

Pages

PREMIÈRE SECTION.

DE L'ÉQUILIBRE DES FORCES.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

CHAPITRE X.

CHAPITRE XI.

CHAPITRE XII.

CHAPITRE XIII.

CHAPITRE XIV.

DEUXIÈME SECTION.

DU MOUVEMENT PRODUIT PAR LES FORCES.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

CHAPITRE X.

CHAPITRE XI.

CHAPITRE XII.

CHAPITRE XIII.

CHAPITRE XIV.

CHAPITRE XV.

CHAPITRE XVI.

CHAPITRE XVII.

CHAPITRE XVIII.

CHAPITRE XIX.

CHAPITRE XX.

CHAPITRE XXI.

CHAPITRE XXII.

CHAPITRE XXIII.

CHAPITRE XXIV.

CHAPITRE XXV.

CHAPITRE XXVI.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA QUATRIÈME PARTIE

AVANT-PROPOS.

1. Dans la première Partie de cet Ouvrage, nous avons fait connaître la méthode que l'on devait suivre pour la formation d'une *science de raisonnement*, c'est-à-dire d'une science dans laquelle tous les rapports entre les choses qu'on y considère sont des conséquences nécessaires de vérités et de données premières, admises avec le sentiment de l'évidence. Les premiers exemples, que nous avons donnés de cette méthode, se rapportaient à la *science des nombres* et à la *science de l'étendue*; nous allons maintenant l'appliquer à la *science des forces*.

Les données fondamentales des deux premières, quoique fournies jusqu'à un certain point par l'observation des objets naturels, sont indépendantes de l'espèce de la matière qui les compose, et qui peut varier de l'un à l'autre : elles ne se rapportent qu'à la distinction et à l'étendue de ces objets. On y fait abstraction de la matière même, et l'on vit dans le monde idéal de la grandeur, de la figure et du nombre, dont le sentiment pourrait rester en nous lors même que le monde matériel, qui nous l'a donné, se trouverait anéanti.

2. Mais les données premières d'où résultent les lois de ce monde idéal, seraient insuffisantes pour

déterminer celles du monde *matériel* au milieu duquel nous vivons. Les sciences qui en dépendent seront fondées sur des principes qui ne pourront être obtenus que par l'observation de la nature, puisque ce monde n'a rien de nécessaire, et aurait pu être créé tout autre qu'il n'est réellement.

Dans cette étude du monde réel, il convient de s'occuper d'abord des propriétés les plus simples et les plus générales de la matière. Il en est une qui est commune à tous les corps, quelle que soit la nature particulière de la matière qui les compose : c'est la mobilité; elle joue un rôle dans la plupart des phénomènes, et par conséquent les lois générales, auxquelles elle donne lieu, demandent à être étudiées avant celles des phénomènes qui dépendent des diverses espèces de matière. L'étude de ces lois est l'objet de cette Partie de notre Ouvrage : et leur ensemble constitue ce que nous avons appelé la *science des forces*.

Ici se trouvent des considérations que ne présentent pas les sciences des nombres, et de l'étendue : celles de *temps*, de *mouvement*, et de *cause*.

La notion des causes productrices de mouvement résulte de notre propre expérience et des efforts que nous faisons pour déplacer les corps; elle n'est sujette à aucune difficulté; mais les deux autres ont donné lieu à bien des discussions entre les philosophes ou les sophistes,

3. La succession de nos sensations, et des événements qui les ont produites, est incontestable pour tous les hommes. Mais entre ce sentiment et la pensée

qu'il y a un être dans lequel se fasse cette succession, il y a un abîme. Le *temps* n'a pas plus d'existence reelle que l'espace; il est peut-être encore moins saisissable. Ces deux prétendus êtres sont des créations fantastiques de l'imagination de l'homme, qui veut toujours aller au delà de ce qu'il peut saisir et comprendre. Mais comme la succession des événements joue un grand rôle dans la nature et dans la vie des hommes, il est de la plus grande importance d'y introduire de l'ordre et de la précision ; et c'est ce qu'on a fait d'abord en rapportant les divers événements à des événements successifs bien saillants, comme par exemple les retours du soleil au-dessus de l'horizon. Ce classement des événements au moyen des jours étant bientôt devenu insuffisant, il a fallu les rapporter à des intermédiaires, et l'on a appele cela *diviser le temps en intervalles :* langage figure qui a fini par faire croire que le temps est une grandeur, divisible comme les quantités géométriques, et sur laquelle se placent toutes les époques, comme les points de division sur une ligne.

Tout en protestant d'avance contre l'admission d'un être appelé *temps*, nous emploierons le langage ordinaire; nous classerons les événements successifs par ce que nous nommerons des *intervalles*, que nous exprimerons par des nombres, après en avoir défini avec précision l'égalité; ce qui ne sera possible qu'après l'introduction d'une autre notion générale, celle du mouvement.

4. Lorsque la distance de deux points varie d'une

manière continue, on dit qu'ils sont en mouvement l'un par rapport à l'autre; et lorsque les distances d'un point aux différents points d'un système rigide varient, on dit que ce point est en *mouvement relativement à ce système*. Il est en *repos relatif* lorsque ces distances restent constantes.

Le mouvement et le repos ainsi conçus sont essentiellement relatifs : mais peut-on attacher un sens au repos ou au mouvement *absolu*?

Ceux qui en parlent supposent un espace sans bornes, dont tous les points ont une réalité, en quelque sorte *personnelle*, et auxquels ils attribuent, sans s'apercevoir du cercle vicieux, une immobilité absolue. Ils disent alors qu'un point est en *repos absolu*, quand ses distances aux divers points de cet espace ne changent pas; et en *mouvement absolu*, quand elles varient. Mais que serait-ce que l'immobilité absolue des points de l'espace, même en leur accordant cette sorte de personnalité, dont nous avons précédemment établi le néant? Il serait tout aussi impossible de la définir pour ces points imaginaires que pour des points réels; et l'immobilité absolue ne peut se définir, qu'en la supposant déjà quelque part; c'est-à-dire qu'en faisant un cercle vicieux.

On dira peut-être que c'est là une conception qui ne peut être ramenée à aucune autre, et qui est évidente par elle-même. Nous répondrons que les choses premières que l'on admet ainsi, doivent être clairement apparentes, évidentes par elles-mêmes. Or il en est tout autrement ici, puisque les hommes n'aperçoivent que des repos ou des mouvements relatifs, et

ne pourraient arriver que par extension à rêver un repos ou un mouvement absolu ; et si l'on voulait expliquer seulement ce qu'on entend par là, on tomberait inévitablement dans le cercle vicieux que nous venons de signaler. Abandonnons donc cette fausse notion, dont l'inutilité est d'ailleurs évidente; car tous les principes que l'on établirait en l'admettant ne pourraient jamais être fondés que sur des observations et des expériences relatives. Et à quoi bon partir du relatif pour établir par induction un absolu imaginaire, d'où l'on tirerait des principes applicables au relatif, qui est seul réel! Ne vaut-il pas mieux, après avoir établi les principes sur le relatif, les appliquer directement au réel, sans remonter à un absolu fantastique, pour l'abandonner immédiatement?

5. Le système des étoiles est le plus considérable et le moins variable qu'il soit donné à l'homme de connaître; c'est à ce système, que l'on peut sans inconvénient considérer comme immuable, qu'il est convenable de rapporter les grands mouvements, comme ceux de la terre et des autres planètes. Mais pour tout ce qui a pour objet le travail des hommes, ou l'exécution d'expériences ayant un but quelconque, particulier ou général, c'est au système des objets liés invariablement au globe terrestre qu'on rapporte les mouvements, sauf à tenir compte ensuite, s'il le faut, du mouvement de la terre elle-même par rapport aux étoiles.

Cela posé, nous dirons que « deux intervalles de temps sont égaux, lorsque deux corps identiques au

commencement de chacun de ces intervalles, et soumis aux mêmes actions et influences de toute espèce, auront parcouru à la fin de ces intervalles des espaces identiques, relativement au système immuable. »

Ainsi, si l'on admettait que la terre se trouve constamment dans des conditions identiques, ses retours dans la même position par rapport aux étoiles se feraient à des intervalles de temps égaux. Un pendule écarté d'un angle donné de la verticale, et abandonné à des époques différentes à des actions identiques, reviendrait à la verticale dans des temps égaux, etc.

L'égalité de deux intervalles quelconques étant définie généralement, on en choisira un pour terme de comparaison; et les temps pourront s'exprimer en nombre, comme si c'étaient de véritables quantités.

6. Dans cet Ouvrage, comme dans notre *Traité de Mécanique*, nous avons établi deux grandes divisions dans la science des forces : la première traite des lois de leur équilibre; la seconde, des lois des mouvements qu'elles produisent.

Les données nécessaires pour la première sont moins multipliées que pour la seconde, et nous les avons établies avec beaucoup de détail, en cherchant avec soin à nous défendre de cette tendance trop naturelle à admettre comme devant être d'une certaine manière, les choses qui ne nous offrent pas de raisons d'être autrement; ou encore à étendre des conceptions purement géométriques, à des questions qui renferment quelque élément du système du monde.

Les données nécessaires pour l'étude des lois du

mouvement, exigent un plus grand nombre d'expériences. Nous avons traité ce point important avec tout le soin qu'il demandait, et nous n'avons pas dissimulé que ces lois premières, étant déduites d'expériences toujours imparfaites, et en nombre limité, avaient besoin d'être confirmées par l'accord de leurs conséquences directes avec les faits observés.

Cette plus grande complication des données serait une raison suffisante pour faire précéder la théorie du mouvement de celle de l'équilibre; mais il y en a une autre très-importante qui résulte de ce que, par un théorème général dû à d'Alembert, on peut ramener la détermination des équations du mouvement d'un système quelconque de points, à celle de son équilibre. Par ce moyen, le problème du mouvement de tout système sera ramené à une question de pur calcul, lorsque les forces auxquelles il sera soumis seront données, et qu'on saura trouver les équations générales de son équilibre.

7. Si les forces ne sont pas connues, ces mêmes équations serviront à les déterminer par la connaissance que l'on aura de certaines circonstances du mouvement.

Le premier, et aussi le plus grand problème de ce genre qui s'est présenté, est celui du mouvement des corps célestes. Les forces qui les produisent n'étant pas données, il fallait les déduire des phénomènes; et les grandes lois que l'observation avait fait connaître à Kepler, devaient se prêter merveilleusement à cette déduction, aussitôt que la science des forces serait

créée. C'est en vue de cette application que Newton a établi sa belle théorie des forces centrales, au moyen de laquelle les lois de Kepler ont déterminé les directions et les grandeurs des forces qui seraient propres à la production de ces phénomènes observés, en supposant que la matière qui forme les corps célestes obéisse à l'action des forces, comme celle qui forme les corps à la surface de la terre. Elles se résument dans cette loi simple de l'attraction mutuelle de toutes les parties de la matière, proportionnellement aux masses, et en raison inverse du carré de la distance.

Ces forces étant connues, tous les phénomènes en sont des conséquences nécessaires, plus ou moins faciles à déduire, suivant l'état plus ou moins parfait de la science des forces : et, par cette grande découverte, l'Astronomie, qui n'était avant Newton qu'une science d'observation, est devenue une *science de raisonnement.*

8. Cette méthode, suivie par Newton pour l'Astronomie, et qui, considérée à un point de vue général, consiste à remonter des phénomènes aux causes, puis à déduire de ces causes toutes les lois de ces phénomènes, a été adoptée avec empressement et suivie avec prédilection par les géomètres français. Malheureusement les phénomènes ne conduisent pas toujours avec la même rigueur à la découverte de la cause élémentaire, qui est la donnée indispensable pour le calcul des actions finies. On est alors obligé d'avoir recours à une nouvelle méthode, celle des *hypothèses.* Elle est toujours fondée sur des observations et des

expériences, mais des expériences insuffisantes pour faire connaître complétement les causes; et l'on ne peut suppléer à ce défaut de données, qu'en admettant comme réel un état de choses qui n'est peut-être que spécieux. Ces hypothèses ne se font pas au hasard; il faut qu'elles s'accordent avec tous les faits connus, et il est probable alors qu'elles s'accorderont avec beaucoup d'autres que l'on ne connaît pas; et comme la classe de phénomènes pour laquelle elles sont faites devient ainsi une science de raisonnement, toutes les lois peuvent en être déduites, et l'on pourra vérifier si elles sont confirmées par l'expérience. Si cet accord se maintient constamment, la légitimité des hypothèses acquerra une probabilité de plus en plus grande; et la théorie que l'on aura formée, et qui a déjà l'avantage de lier entre eux tous les faits connus, pourra être employée avec confiance à la prévision de faits nouveaux. Mais si, comme cela est arrivé quelquefois, les faits prévus ne sont pas vérifiés par l'expérience, on est obligé de changer les hypothèses, et d'en trouver, si l'on peut, de nouvelles qui s'accordent avec l'ensemble de tous les phénomènes connus.

APPLICATION

DES

MÉTHODES GÉNÉRALES

A LA

SCIENCE DES FORCES.

INTRODUCTION.

DE L'ÉTABLISSEMENT DES AXIOMES

DANS LES SCIENCES QUI DÉPENDENT DU MONDE MATÉRIEL.

1. Tout ce qui dépend du nombre et de la figure ne demande aucune connaissance des propriétés particulières de la matière; et dans cette étude, qui nous a seule occupé jusqu'ici, on a pu faire abstraction de la matière elle-même, et créer le monde idéal de la grandeur, de la figure et du nombre, dont le *sentiment* pourrait rester en nous lors même que le monde matériel qui nous l'a donné se trouverait anéanti.

Nous allons maintenant entrer dans la réalité de ce monde, en ne nous attachant cependant qu'à la propriété la plus générale et la plus simple, qui se retrouve dans

tous les phénomènes naturels, et doit, par conséquent, être étudiée avant toutes les autres.

D'après ce qui a été exposé dans la première Partie de cet Ouvrage, il faut, pour qu'une science devienne ce que nous avons nommé une *science de raisonnement*, que l'on connaisse assez de principes généraux sur les choses dont elle s'occupe, pour que tous les rapports auxquels elles peuvent donner lieu en soient des conséquences nécessaires. Ces principes, ces données premières, renferment virtuellement toute la science, sans quoi le raisonnement ne l'en tirerait pas. Mais la science ne sera pas faite par cela seul qu'on connaîtra ces principes, parce que leurs conséquences sont infinies en nombre et en variété, et que la science est l'ensemble de toutes ces conséquences.

Ces principes, pour une science dépendant du monde matériel, ne pourront être obtenus que par l'observation de la nature, puisque les lois du monde matériel n'ont rien de nécessaire, et auraient pu être tout autres qu'elles ne sont. Pour arriver plus promptement et avec plus de précision à la connaissance des vérités que l'on cherche, il ne faudra pas toujours attendre que la nature nous les offre, il faudra provoquer ses réponses, en créant les circonstances les plus propres à les rendre significatives, c'est-à-dire joindre à l'*observation immédiate*, ce que l'on appelle des *expériences*; et il en faudra beaucoup pour se croire le droit de proclamer une vérité générale : on ne sera même jamais certain qu'un rapport que l'on aura vérifié dans un nombre immense de cas analogues, aura lieu dans un nouveau cas du même genre; mais on sera invinciblement porté à le croire, tant par la puissance de l'analogie, que par le besoin naturel à l'homme de connaître et d'influencer les faits à venir.

Les données qui auront ainsi constitué une science de raisonnement auront donc quelque chose d'incertain; aussi

sera-t-il à propos d'en vérifier, autant qu'on le pourra, les conséquences éloignées. Mais lorsque l'on aura toujours trouvé ces conséquences conformes à la réalité directement observée, la science approchera beaucoup de la perfection de la Géométrie et de la Science des nombres, et l'on pourra sans inquiétude croire à l'exactitude des solutions qu'elle fournira. L'homme ne peut pas aller plus loin; mais cela lui suffit dans la pratique, et son esprit doit être satisfait, puisqu'il a la conscience d'avoir fait tout ce que comporte sa nature.

Cela posé, nous allons procéder à l'établissement des données premières de la science qui va faire l'objet de nos études.

DES FORCES.

2. Lorsque, dans un système quelconque de corps liés ou non les uns avec les autres, il ne s'est opéré pendant un certain temps aucun changement dans les positions relatives, et qu'à un certain instant on voit l'un d'entre eux se déplacer par rapport aux autres, restés dans les mêmes positions les uns par rapport aux autres, on reconnaît généralement qu'il y a eu intervention de quelque chose d'étranger à ce point : et de quelque nature que soit cette intervention, on l'appellera *cause* de ce déplacement. Pour que de pareilles expériences soient le moins possible exposées aux dérangements ou accidents causés même par les procédés et appareils d'expérimentation, il convient de prendre le système le plus vaste, et dont l'immobilité relative des parties soit le mieux assurée par une longue durée; et c'est le globe terrestre lui-même qu'il est bon de choisir. Bien que les objets à sa surface soient sujets à mille déplacements relatifs, les grandes masses qu'on y reconnaît, les montagnes, les grands édifices, offrent une fixité relative qui permet de prendre leur système comme

invariable, et se prêtant d'ailleurs sans dérangement possible à toutes les expériences auxquelles les hommes peuvent se livrer. Et quelquefois, pour abréger le langage, nous appellerons *fixes* des corps, des lignes ou des points qui seront supposés ne pouvoir se déplacer par rapport à ce système

3. Cette observation d'une cause produisant un dérangement relatif étant répétée un grand nombre de fois, la tendance naturelle de l'homme à la généralisation le porte à croire qu'il en sera toujours ainsi ; de sorte que, même dans les cas où il n'aperçoit pas d'intervention étrangère, il admet qu'elle existe, et il pose en principe général que lorsqu'un point faisant partie d'un système invariable vient à se déplacer par rapport aux autres, cela est dû à l'action d'une cause étrangère; et ce déplacement est dit l'*effet* de cette *cause*.

4. Quelle est maintenant la nature de cette action? Pourrait-elle, par exemple, provenir d'une simple volonté d'un être supérieur? C'est ce qu'il n'est pas donné à l'homme d'approfondir, et il doit se borner à l'étudier sur lui-même. C'est en déplaçant lui-même des corps faisant partie d'un système invariable, qu'il acquiert le sentiment de l'effort; et il reconnaît en même temps que l'effort qui a déplacé le corps, pourrait être détruit par un autre effort qui seul l'aurait déplacé en sens contraire. De sorte qu'il a le sentiment de l'effort ou de la *force*, lors même qu'il n'en résulte pas de déplacement.

Lorsque, dans un système invariant, un corps se déplace relativement, et qu'on n'aperçoit pas de cause de ce déplacement, on reconnaît encore qu'on aurait pu l'empêcher par un effort qui, seul, le déplacerait en sens contraire; et il est naturel d'admettre par analogie qu'il s'exerçait sur ce corps un effort qui aurait été détruit par celui qui aurait

empêché le déplacement. Ainsi un corps qu'on empêche de descendre suivant la verticale, au moyen d'un effort dont on a la conscience, sera regardé comme sollicité constamment par une force invisible qui le pousse dans ce sens : force qui pourra varier d'un corps à un autre. De même encore, la présence d'un aimant dans un système où il y aura un morceau de fer, qui, maintenu d'abord, sera devenu libre, produira un déplacement qu'on pourrait empêcher par un effort convenablement dirigé. Toutes ces expériences bien constatées et souvent répétées, donnent la notion de force aussi nette que l'expérience puisse faire connaître quoi que ce soit. Elle n'a rien d'hypothétique; mais nous ne chercherons pas à connaître sa nature intime, pas plus que nous ne cherchons celle de la matière elle-même. Nous nous bornerons à en étudier les effets, et à reconnaître et accumuler, par des expériences précises, assez de données pour que la science des forces devienne ce que nous nommons une *science de raisonnement*.

5. Pour commencer par les considérations les plus simples, nous concevrons les corps sur lesquels agissent des forces, comme réduits à des points sans étendue sensible ; nous appellerons *direction d'une force* appliquée à un pareil corps, ou point *matériel*, celle suivant laquelle le point se déplacerait dans le système invariable, s'il y était entièrement libre et qu'il ne fût sollicité par aucune autre force.

Admettant, d'après l'expérience, que le déplacement pourrait être empêché par une certaine force de direction contraire, nous dirons que cette seconde force est égale à la première. Ainsi se trouvera définie, dans ce nouvel ordre de choses, l'*égalité*, qui est la première notion indispensable pour la comparaison des quantités.

6. La seconde notion indispensable, et qui complète les

données nécessaires à la comparaison et à la mesure des quantités, est celle de leur addition. Nous dirons que deux forces *s'ajoutent* lorsqu'elles agissent dans le même sens et suivant la même droite sur un même point matériel. L'expérience ferait voir, si cela ne paraissait pas admissible de soi-même, que le déplacement d'un point libre s'effectuerait, sous l'influence des deux forces, dans la même direction où il aurait eu lieu sous l'influence de chacune d'elles séparément; et que ce déplacement pourrait être empêché, comme nous l'avons déjà dit, au moyen d'une force de direction contraire.

D'où il suit que les deux forces qui sollicitent le même point dans le même sens pourraient être remplacées par une seule, et cette dernière s'appellera la *somme* des deux.

Ayant ainsi défini l'*égalité* et l'*addition* de deux forces, et par suite d'un nombre quelconque de forces, la soustraction, la multiplication et la division des forces s'en suivent. La comparaison des forces et leur expression en nombre en résultent, et il ne reste plus qu'à trouver les moyens pratiques d'exécution.

7. Les forces pouvant ainsi être censées représentées par des nombres, et les nombres pouvant l'être eux-mêmes par des lignes, les forces pourront l'être par des lignes; et il sera commode de les placer sur les directions respectives de ces forces, en partant des points mêmes où elles sont appliquées. De cette manière, une force quelconque sera déterminée par son point d'application, sa direction, et par une longueur portée sur cette direction, à partir du point d'application, qui représentera, par son rapport à l'unité de longueur, le rapport de la force à celle qui a été prise pour unité.

8. Si nous considérons un assemblage de points, liés entre eux d'une manière quelconque, entièrement libre

dans le système invariable auquel on rapporte les corps, ou assujetti à certaines liaisons avec les points de ce système, et que des forces viennent à être appliquées à des points de cet assemblage : elles produiront généralement un déplacement, mais il peut arriver aussi que leurs effets soient détruits par les liaisons des points, tant entre eux qu'avec ceux du système invariable, et l'on dit alors qu'elles y sont en *équilibre*.

L'étude de ce cas particulier est de la plus haute importance, non-seulement par les applications utiles que les hommes en ont faites, mais encore parce qu'il est la base des solutions de toutes les questions de mouvement. C'est pour cela que la recherche des lois de l'équilibre des forces doit être l'objet des premières études.

Elle exigera nécessairement des données tirées de l'observation ; car le monde dans lequel nous vivons aurait pu être soumis à des lois autres que celles qui y règnent ; et il serait insensé de prétendre que les lois que l'homme imaginerait seraient nécessairement celles qui ont été choisies par le Créateur de l'univers.

Les données nécessaires à la recherche des lois de l'équilibre des forces sont moins multipliées que celles qu'exigent les lois des déplacements qu'elles peuvent produire.

Cette recherche sera l'objet de la première Section de ce volume ; et nous ne nous occuperons d'abord que de l'établissement des premières données et des principes qui lui sont nécessaires. La seconde Section, où l'on considérera les déplacements produits par les forces, sera précédée de l'établissement de nouvelles données, inutiles pour les simples questions d'équilibre.

PREMIÈRE SECTION.

DE L'ÉQUILIBRE DES FORCES.

DE L'ÉQUILIBRE DES FORCES.

CHAPITRE PREMIER.

DONNÉES EXPÉRIMENTALES ET PROPOSITIONS GÉNÉRALES RELATIVES À L'ÉQUILIBRE DES FORCES

9. Les propositions que nous allons établir ne devront pas être présentées toutes immédiatement aux commençants : trop de généralité dès le début produit presque toujours du vague et de l'obscurité, et l'on ne se rend pas assez compte de ce que l'on admet sur des choses que l'on n'a pas encore pratiquées.

Mais dans un Ouvrage comme celui-ci, qui n'est pas destiné à ceux qui n'ont encore aucune notion sur les matières qui y sont traitées, il nous a paru convenable de présenter dans leur ensemble les principes qui sont la base de la science, et qu'on applique à chaque instant dans les circonstances les plus variées. Il peut être sage, dans un premier enseignement, de n'introduire chacun d'eux qu'au moment où il est devenu indispensable; mais quand on a suffisamment étudié les détails, il est bon de réfléchir sur leur enchaînement, et de se rendre compte de l'ensemble des données premières, et des principes qui ont guidé dans les déductions.

10. Premier principe. — *Lorsqu'un système de points est en équilibre, on ne détruit pas cet état en fixant un ou*

plusieurs de ces points, ou en établissant entre eux des liaisons nouvelles.

En effet, on n'introduit ainsi aucune force, on donne seulement des moyens de détruire certaines forces nouvelles que l'on introduirait dans le système.

Nous admettrons encore, soit comme évident de soi-même, soit comme résultat de l'expérience, que lorsqu'un système de points est en équilibre, cet état subsisterait encore si l'on ajoutait de nouveaux points, ou qu'on en supprimât, pourvu que toutes les liaisons primitives ne fussent pas altérées. Ainsi, en supposant le système entièrement rigide, ce que nous désignerons quelquefois sous le nom de *corps solide*, on pourra y lier ou en retrancher une quantité de matière quelconque, pourvu que les points auxquels sont appliquées les forces ne puissent changer leurs distances mutuelles, et qu'aucune force nouvelle ne soit introduite; et l'équilibre ne sera pas troublé : de sorte qu'on n'a à s'occuper que du système des points d'application et de leurs liaisons extérieures, indépendamment de la matière qui compose le corps, et de la forme qu'on lui donne.

11. Deuxième principe. — *Si divers systèmes de forces appliquées à un système de points liés entre eux et au système invariable d'une manière quelconque, y sont séparément en équilibre, et que les liaisons soient susceptibles de produire des résistances indéfinies, ils seront en équilibre quand ils y seront appliqués simultanément.*

Ainsi, dans un système sur lequel certaines forces sont en équilibre, on peut, sans le rompre, introduire de nouvelles forces qui seraient en équilibre sur ce système, si elles y étaient seules.

On peut aussi évidemment supprimer des forces qui sont détruites par les efforts qu'elles font naître dans ce système matériel. Mais il ne suffirait pas de s'assurer qu'elles

seraient en équilibre quand on les appliquerait seules sur le système; il faut toujours, pour avoir le droit de les supprimer, reconnaître qu'elles ont fait naître dans le système les mêmes résistances que si elles étaient seules, alors, en les supprimant, les autres forces sur lesquelles les précédentes n'agissaient pas, puisqu'elles étaient détruites indépendamment d'elles, resteront en équilibre : ce que toutes les expériences confirment.

Cette condition nécessaire pour la suppression d'un groupe de forces n'est pas toujours facile à reconnaître, et est suppléée par le principe suivant.

12. Troisième principe. — *On peut, sans détruire l'équilibre, supprimer un groupe de forces telles, que des forces respectivement égales et appliquées aux mêmes points en sens contraire, seraient en équilibre si elles existaient seules sur le système.*

En effet, d'après le principe précédent, on ne dérangera pas l'équilibre primitif en introduisant ces dernières forces, mais chacune d'elles détruisant la force égale et contraire appliquée au même point, on peut les supprimer l'une et l'autre en chaque point sans déranger l'équilibre, et il ne reste plus que les forces primitives, moins le groupe en question.

Il est à remarquer que l'on peut ainsi supprimer un groupe de forces qui ne serait pas en équilibre sur le système, s'il y existait seul. Il est suffisant que le groupe composé de forces respectivement contraires, soit en équilibre s'il existe seul sur le système : toutefois, cette condition n'est pas indispensable, et nous le montrerons tout à l'heure.

Ces principes très-généraux sont d'une grande utilité, à cause des transformations sans nombre qu'ils permettent de faire.

Remarque. — Quelque rigides que soient les corps, les forces qu'ils détruisent opèrent toujours de petits changements dans la position relative de leurs molécules. On n'en tiendra ici aucun compte; et l'on supposera que des forces qui se font équilibre sur un corps, et qui ont, par cela même, dérangé tant soit peu ses molécules, s'y feraient encore équilibre si, par des moyens quelconques, on pouvait rendre ce corps assez rigide pour que le dérangement fût encore bien plus insensible et même nul.

EXEMPLES DE L'APPLICATION DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS.

13. Avant d'aller plus loin, nous allons montrer, par un exemple très-simple, combien il est nécessaire d'avoir égard à l'observation que nous avons faite au sujet du second des principes précédents, et comment cette difficulté disparaît par l'application du troisième.

Soient A et B (*fig.* 1) deux points liés de telle sorte, qu'ils ne puissent s'éloigner l'un de l'autre, mais qu'ils puissent se rapprocher. Que l'on applique au point A deux forces égales et contraires P, P′ dans la direction de la droite AB, et que l'on applique à B deux forces Q, Q′ égales aux premières, et agissant aussi en sens contraire suivant la ligne AB; il y aura équilibre dans le système, puisqu'il y a équilibre en chaque point. Or les deux forces P, Q′ seraient en équilibre si elles agissaient seules sur le système AB, et cependant on ne peut les supprimer sans perdre l'équilibre des quatre forces, car il resterait les deux forces P′ et Q, qui ne se détruiraient pas, puisque les deux points A et B peuvent se rapprocher, par hypothèse. Or il est facile de reconnaître que le groupe P, Q′ ne rentre dans aucun des deux cas que nous avons indiqués précédemment, comme permettant la suppression.

En premier lieu, les deux forces P, Q′ ne se détruisent pas effectivement, et ne produisent pas sur AB l'effort qu'elles produiraient si elles y étaient seules appliquées. La force P est détruite par P′ et n'agit que sur le point A; il en est de même des forces Q, Q′ en B, et il n'en résulte aucune action entre les points A et B, qui ne cesseraient pas d'être en équilibre quand même il n'existerait aucune liaison entre eux.

En second lieu, les forces P′ et Q, égales et opposées à P et Q′, ne seraient pas en équilibre si elles agissaient seules sur le système, puisque les points A et B peuvent se rapprocher.

Donc enfin on ne pourrait affirmer qu'en supprimant les forces P et Q′ on ne détruirait pas l'équilibre; et nous avons vu qu'effectivement il se trouvait détruit par cette suppression.

Cet exemple montre donc que, dans un système en équilibre, on ne peut pas toujours supprimer un groupe de forces qui serait en équilibre sur le système, s'il y était seul. Et il montre aussi qu'on peut supprimer un système qui ne serait pas en équilibre s'il était seul sur le système, mais qui est tel, que le système opposé serait en équilibre s'il y était seul. On peut en effet supprimer les deux forces P′ et Q qui ne seraient pas en équilibre sur le système, mais sont telles, que les contraires y seraient.

14. On peut donner aussi un exemple bien simple de ce que nous avons avancé dans le troisième principe, savoir qu'on *peut quelquefois supprimer un système de forces tel, que le système contraire, existant seul, ne serait pas en équilibre*. Il suffit pour cela de considérer le système P, Q′, existant seul sur AB. On peut évidemment le supprimer sans que le système cesse d'être en repos, et cependant le système des forces opposées P′, Q, existant seul, ne serait

pas en équilibre sur un AB_1 mais les forces que l'on supprime sont effectivement détruites par la résistance du système. Cette remarque peut être énoncée d'une manière différente en observant que supprimer un système de forces, c'est introduire le système contraire. On aura alors la proposition suivante :

On peut quelquefois introduire un groupe de forces qui ne serait pas en équilibre sur le système.

15. *Remarque.* — On tire des considérations précédentes cette conséquence, que si l'on introduit des forces dans un système, on ne peut pas toujours affirmer que leur effet sera le même que si l'on avait préalablement introduit certaines autres forces qui n'auraient pas détruit l'équilibre, mais qui cependant pourraient avoir de l'influence sur celles qu'on applique en dernier lieu. Et pour cette raison on ne peut, sans examen, conclure l'effet de forces introduites dans un système où l'on aurait légitimement remplacé un groupe par un autre. Un exemple bien simple le prouvera sans réplique.

Soit une force P appliquée à un point A d'un corps éminemment flexible, mais inextensible AB, ayant tous ses points en ligne droite (*fig.* 2). Introduisons suivant la droite AB deux forces P′, P″ égales à P et de sens opposés. L'effet de la force P sur le système ne sera pas modifié, soit qu'il y ait équilibre ou non, pourvu que le corps reste constamment dans les conditions primitives qui ont permis l'introduction de P′, P″. Or, si l'on applique en B une force égale et contraire à P″, les quatre forces se détruisent, tandis qu'il en aurait été autrement si l'on avait appliqué la dernière force avant l'introduction de P′, P″.

Fig. 2.

Nous reconnaîtrons bientôt que les mêmes réserves ne

se rencontrent pas, dans les systèmes rigides, que dans ceux dont les liaisons comportent des changements de forme ou de disposition. Mais il faut prendre garde, dès le commencement, d'attribuer aux principes une trop grande généralité.

CHANGEMENT DU POINT D'APPLICATION D'UNE FORCE.

16. Lorsqu'une force P est appliquée à un point libre A, nous allons démontrer qu'on peut, sans changer son effet, quel qu'il soit, l'appliquer à tout autre point B de sa direction, si ce point est lié invariablement au premier.

Et il n'est même pas nécessaire que cette liaison soit aussi complète.

Si, par exemple, le point B est situé par rapport à A du côté où s'exerce l'action de la force P, il suffit que la distance AB ne puisse augmenter; ce qui sera le cas, par exemple, où ces deux points seraient liés par un corps extrêmement délié, éminemment flexible et inextensible. Nous donnerons dorénavant le nom de *fil* à un pareil corps, et nous le considérerons comme n'ayant de dimensions que dans le sens de la longueur, et prenant sans résistance toutes les formes possibles, en conservant la même longueur. Nous considérerons plus tard des fils élastiques, qui sous l'action des forces peuvent changer de longueur.

Si, au contraire, le point B était de l'autre côté de A, il suffirait que la distance AB ne pût diminuer.

Pour le démontrer, dans le premier de ces deux derniers cas, appliquons aux extrémités de la droite inextensible AB (*fig.* 2) deux forces égales à P. et agissant suivant la droite AB dans les directions AP′, BP″, elles se détruiraient si elles étaient seules sur le système, et par conséquent leur introduction est permise. Mais les deux forces égales P, P′, appliquées au même point en sens contraires,

se détruisent, et il ne reste plus que la force P'', qui n'est autre que la force P transportée au point B de sa direction.

On raisonnerait d'une manière analogue si le point B était situé de l'autre côté du point A_1 et que la distance AB ne pût pas diminuer.

Les raisonnements précédents ne seraient plus applicables dans le cas où, le système des points étant variable, la distance AB ne resterait pas la même.

Enfin si les conditions respectives de ces deux cas sont réunies, c'est-à-dire si les points A et B sont invariablement liés l'un à l'autre, comme cela arrivera, par exemple, s'ils font partie d'un système rigide, on pourra transporter la force en un point quelconque de sa direction, supposé toujours invariablement lié au système.

Remarque. — Il est important d'observer que, quand on a fixé des points, ou introduit toute autre espèce de liaison dans un système en équilibre, on peut supprimer des forces telles, que les contraires seraient en équilibre sur le système modifié. C'est une conséquence immédiate du troisième principe.

Si, par exemple, dans un système rigide, on fixe un de ses points, on pourra supprimer toutes les forces dont la direction passera par ce point, puisque les contraires appliquées en ce point seraient détruites.

Si, au lieu de fixer un point du système, on en fixe deux, et par suite tous ceux de la droite qui les joint, soit qu'ils appartiennent d'abord au système, soit qu'on les y introduise et qu'on les lie invariablement aux autres, on pourra supprimer toutes les forces dont la direction rencontrera cet axe fixe, puisque chacune d'elles peut être appliquée à son point de rencontre qui est fixe.

17. *Postulatum.* — Nous venons de voir que quand un système rigide avait un point fixe autour duquel il pouvait

se mouvoir d'une manière quelconque, toute force dont la direction passait par ce point était détruite, et ne pouvait produire aucun déplacement. Nous admettrons comme résultat d'expérience, ou comme axiome, que *toute force dont la direction ne passerait pas par le point fixe, ne serait pas détruite, et produirait un déplacement.*

Nous admettrons encore qu'*il en serait de même dans le cas d'un axe fixe, ou de deux points fixes.*

Il en résultera nécessairement que si un corps a un point unique, ou un axe, fixe, et qu'on sache qu'une force appliquée seule à ce corps est détruite, on pourra affirmer que sa direction passe par le point fixe, ou rencontre l'axe fixe, à une distance finie ou infinie.

Nous donnerons encore un peu d'extension à ce postulatum; et nous admettrons que si un système rigide ne peut que tourner autour d'un axe fixe, et qu'il soit sollicité par plusieurs forces qui, si elles agissaient séparément, le feraient tourner dans le même sens, le système, sous leur action simultanée, tournerait dans ce même sens, et ne serait pas en équilibre.

Si, au lieu d'un axe fixe, il y avait seulement un point fixe, on peut affirmer que des forces appliquées à ce système n'y seront point en équilibre, si elles n'y sont pas quand on fixera un second point du système, ou un axe passant par le premier.

18. *Réciproque d'une proposition précédente.* — Il est important de remarquer qu'une force agissant sur un système libre, ne saurait être transportée parallèlement à elle-même en un point qui ne serait pas sur sa première direction; et, plus généralement, qu'elle ne peut être remplacée par une autre qui n'agirait pas suivant la même ligne droite.

En effet, supposons qu'une force P puisse être remplacée par une autre Q qui n'agisse pas suivant la même ligne droite. Fixons un point sur la direction de P, qui soit autre que le point de rencontre des directions de P et Q, si toutefois elles se rencontrent. La force P sera détruite, comme nous venons de le voir; elle n'aurait donc pas pu être remplacée par Q, qui dans les mêmes conditions ne serait pas détruite.

Il n'est donc pas possible, dans un système libre, de transporter une force parallèlement à elle-même en un point hors de sa direction, ni de la remplacer par toute autre force dirigée comme on voudra et appliquée à un point qui ne serait pas sur sa direction.

Et, par conséquent, toutes les fois qu'on pourra prouver qu'une force, agissant sur un système libre, peut, sans changer d'effet, être remplacée par une autre, appliquée en un certain point, on en conclura nécessairement que sa direction passait par ce point. Il est facile de reconnaître, en outre, que cette nouvelle force doit être égale à la première; car il a été démontré que, dans la position où elle se trouve, elle pourrait remplacer la première si elle lui était égale; donc, si elle était plus grande ou plus petite, elle ne produirait pas le même effet que la première, ce qui est contre l'hypothèse.

19. *Deux forces qui ne sont pas égales et directement opposées ne peuvent se faire équilibre sur un système rigide libre.*

Cela résulte immédiatement des raisonnements précédents; car, en fixant sur la direction de l'une un point qui ne serait pas sur la direction de l'autre, l'équilibre ne devrait pas être rompu; mais la première serait détruite, et la seconde mettrait le système en mouvement. L'équilibre n'existait donc pas. Il est donc nécessaire, pour

qu'il existe, que tout point pris sur la direction d'une des forces soit sur la direction de l'autre, et par conséquent que ces deux directions se confondent; il est évident alors qu'elles doivent agir en sens contraire et être égales.

SYSTÈMES ÉQUIVALENTS OU QUI PEUVENT SE REMPLACER. — COMPOSANTES ET RÉSULTANTE.

20. Soit A un certain groupe de forces, et B un second groupe qui pourrait le remplacer sur un système donné de points, sans déranger son état, quel qu'il soit. Introduisons le groupe B et l'opposé que je désignerai par — B, sans attacher aucun autre sens au signe —. Les trois systèmes A, B, — B ne seront autre chose que A. Or, pour que B puisse le remplacer, il faut qu'on puisse supprimer A et — B, ce qui aura lieu si le contraire — A et B est en équilibre quand il existe seul sur le système. D'où l'on conclut qu'*un groupe de forces B peut toujours en remplacer un autre A, lorsqu'il serait en équilibre sur le système avec l'opposé — A à cet autre.*

Mais cela n'entraîne pas que A puisse remplacer B, parce que A ne serait peut-être pas en équilibre avec — B, et alors on ne pourrait prononcer.

Si, par exemple, on considère un fil flexible MN et une force P appliquée au point N suivant NM, on pourra la remplacer par une force égale et de même sens P′ appliquée en M, parce que cette dernière serait en équilibre avec P″ égale et contraire à P. Mais on ne peut affirmer que P pourrait remplacer P′, parce que P ne serait pas en équilibre sur le fil avec la force égale et opposée à P′ et appliquée en M.

Et, en effet, P ne pourrait pas toujours remplacer P′.

Remarque. — On voit par cet exemple qu'il est possible

qu'un groupe de forces B soit équivalent à un autre groupe A, sur un certain système, sans que A soit équivalent à B, sur le même système.

21. *Composantes et résultante.* — Lorsque des forces appliquées à un système rigide et entièrement libre dans l'espace sont telles, qu'elles pourraient dans tous les cas être remplacées par une seule, cette force unique est dite la *résultante* des premières, et celles-ci s'appellent les *composantes* de l'autre.

Cette substitution d'une seule force à plusieurs autres sur un système rigide et libre se nomme *composition* des forces, et la substitution de plusieurs forces à une seule se nomme *décomposition* de cette dernière.

On voit donc, par ce qui précède, qu'on aura la résultante d'un système de forces, si l'on en trouve une qui fasse équilibre au système contraire, c'est-à-dire au système qui consisterait dans les forces primitives prises en sens contraire et appliquées respectivement aux mêmes points. Et, par conséquent, le problème de la composition des forces rentre dans celui de l'équilibre.

Si l'on a trouvé une résultante, il n'y a pas à en chercher une autre, puisque nous avons vu qu'une force ne peut être remplacée identiquement que par une autre qui ne serait que la première transportée en un point de sa direction lié invariablement au système.

Mais peut-on dire réciproquement qu'une force puisse être remplacée par plusieurs autres, par cela seul qu'elle pourrait les remplacer? Nous avons vu, en effet, des cas où un groupe de forces A pouvait être remplacé par un autre B, sans pouvoir réciproquement le remplacer. L'exemple que nous en avons donné s'appliquait, il est vrai, à un système non rigide; mais nous n'avons pas en-

core le droit d'affirmer que cette réciproque est toujours vraie quand il s'agit d'un corps solide.

Nous prouverons bientôt qu'il en est ainsi, c'est-à-dire que si un groupe A peut être remplacé par un autre B sur un système rigide, réciproquement il pourra remplacer B. Mais dans les cas simples que nous étudierons avant d'avoir établi cette proposition générale, nous reconnaîtrons sans peine que cette réciprocité a lieu.

REMARQUES DIVERSES.

22. *Lorsque plusieurs forces, situées ou non dans un même plan, sont appliquées à un même point et qu'elles ne sont pas en équilibre, elles ont toujours une résultante.*

En effet, supprimons ces forces, et introduisons à leurs places des forces respectivement égales et contraires. Le point tendra, par leur action, à se déplacer dans une certaine direction déterminée; et, si l'on appliquait en sens contraire une force d'une intensité convenable, on empêcherait évidemment le déplacement de se produire, et l'équilibre aurait lieu. Donc, d'après ce que nous venons de dire, cette force pourra remplacer les premières.

23 *Lorsque trois forces appliquées en un même point sont en équilibre, leurs directions sont dans un même plan.*

Trois forces respectivement égales et opposées aux premières seraient aussi en équilibre.

Chacune des trois forces est égale et opposée à la résultante des deux autres.

1° Si les trois forces n'étaient pas dans un même plan, et qu'on fixât deux points liés au point donné et situés sur les directions de ces deux forces, l'équilibre ne serait pas détruit. Or ces deux forces seraient détruites et la

troisième ne le serait pas (nº 16, *Remarque*), l'équilibre serait donc détruit, ce qui est contradictoire. Il n'est donc pas possible que les trois directions ne soient pas dans un même plan.

2° Les trois forces étant en équilibre sur le point libre, cet état ne cessera pas quelque part qu'on transporte ce système sans y rien changer. Or, si on le fait tourner de deux angles droits dans son plan, autour du point d'application, chaque force est dans la direction opposée à la première et l'équilibre subsiste. Donc, lorsque trois forces sont en équilibre sur un point, les trois respectivement égales et contraires y sont aussi.

3° Une force opposée à l'une quelconque des trois peut remplacer les deux autres ; car, d'après ce qui vient d'être dit, elle serait en équilibre avec les forces égales et opposées aux deux autres. Donc *chacune des trois forces est égale et opposée à la résultante des deux autres.*

Inutile de faire remarquer qu'il n'y a qu'une seule force qui puisse faire équilibre à deux autres appliquées à un point, car cette force doit être opposée à la résultance, qui est unique (nº 21).

Rappelons encore qu'en introduisant une force égale et opposée à la résultante de deux forces appliquées à un point, il y a équilibre. En effet, on a démontré que l'équilibre est possible en introduisant une troisième force convenable, et ensuite que cette troisième est égale et opposée à la résultante. D'où il suit que la force égale et opposée à la résultante établit l'équilibre.

24 *Si des forces en nombre quelconque sont appliquées à un même point, et que leurs directions soient toutes dans un même plan et d'un même côté d'une droite passant par ce point, il est impossible qu'elles soient en équilibre.*

En effet, soient A le point donné (*fig.* 3), XAX' une droite telle, que toutes les directions des forces P, P', P'', P''',..., soient d'un même côté de cette droite, et supposons que ces forces soient en équilibre. Fixons un point O

Fig. 3.



situé sur AX et lié invariablement à A, l'équilibre ne sera pas troublé.

Or, si l'on conçoit un rayon vecteur tournant autour de A, et partant de la direction AX pour arriver à AX' en se mouvant du côté où sont les directions des forces données, on reconnaît immédiatement (n° 16) qu'une force qui serait appliquée seule au point matériel A, dans une quelconque de ces directions, le ferait tourner autour de O dans le même sens, et que toute force appliquée à A, dans une direction située de l'autre côté de XX', ferait tourner le point dans le sens contraire autour de O.

Il suit de là que chacune des forces P, P', P'',... tendant à faire tourner A autour du point fixe O dans le même sens, rien ne s'opposera à ce que le mouvement ait lieu, et que, par conséquent, ces forces ne seront pas en équilibre comme cela devrait être d'après l'hypothèse.

Cette hypothèse était donc fausse et les forces ne pouvaient être en équilibre, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — Il suit de là que lorsque trois forces P, P', P'', appliquées à un point libre A, sont en équilibre,

la direction contraire à celle de l'une quelconque des trois est dans l'angle des deux autres.

En effet, si la direction opposée à AP, par exemple, n'était pas dans l'angle P'AP", on pourrait mener par A une droite telle, que les directions des trois forces seraient d'un même côté de cette droite ; les trois forces ne seraient donc pas en équilibre, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

25. *La direction de la résultante de deux forces appliquées à un même point est située dans l'angle formé par les directions de ces forces.*

En effet, la force égale et opposée à la résultante établissant l'équilibre, la direction qui lui est opposée, c'est-à-dire celle de la résultante, sera dans l'angle des deux forces.

Si les deux forces sont égales, la résultante sera dirigée suivant la bissectrice de l'angle des forces.

Supposons, en effet, qu'elle ait une autre direction et faisons tourner de deux droits le système autour de la bissectrice. La résultante aura pris une position symétrique par rapport à la bissectrice. Or les deux forces coïncidant avec les premières devraient aussi donner la première résultante, et le même système en aurait deux, ce qui est impossible. Donc la direction de la résultante ne peut être que la bissectrice.

26. *Si une force R peut remplacer deux forces P et Q appliquées à un même point, réciproquement P et Q ensemble pourront remplacer R.*

En effet, si R peut remplacer P et Q, nous venons de voir qu'il y aurait équilibre entre P, Q, —R ; donc P et Q peuvent remplacer R, puisque leur système est en équilibre avec l'opposé de R (n° 20).

27. Lorsque deux forces égales non opposées sont appli-

quées à un même point, elles peuvent être transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque de la bissectrice de leur angle, pourvu qu'il soit lié invariablement au premier. Car ces forces peuvent être remplacées par une seule, dirigée suivant cette bissectrice, et qui peut être appliquée en un quelconque de ses points, or, en ce point, d'après le numéro précédent, elle peut être décomposée comme elle aurait pu l'être au premier point d'application, et l'on aura ainsi deux forces égales et parallèles aux premières, appliquées en un point quelconque de la bissectrice.

RÉSUMÉ DES PROPOSITIONS ET PRINCIPES QUI PRÉCÈDENT.

28 1° On peut, sans rompre l'équilibre d'un système, introduire de nouvelles forces telles, que si elles étaient appliquées seules, elles se détruiraient au moyen des résistances et efforts que peut produire le système et qui sont supposés illimités.

2° On peut, sans détruire l'équilibre, supprimer le groupe de forces ainsi introduit, et généralement tout groupe de forces qui sont effectivement détruites par les résistances seules du système, sans le secours des autres forces.

3° On peut, sans détruire l'équilibre d'un système quelconque, y supprimer des forces telles, que l'ensemble de forces égales appliquées respectivement aux mêmes points en sens contraires seraient en équilibre sur le système, si elles y agissaient seules.

Cette circonstance pourrait avoir lieu sans que les forces elles-mêmes fussent en équilibre, agissant seules sur le système.

4° Une force peut, sans changer son effet, quel qu'il soit, être appliquée en un point quelconque de sa direction,

lié invariablement à celui auquel elle était d'abord appliquée. Il n'est même pas nécessaire que la liaison des deux points soit complète.

5° Lorsqu'un système rigide a un seul point fixe, les forces dont la direction passe par ce point sont détruites, puisqu'elles peuvent être appliquées au point fixe. S'il y a un axe fixe, les forces dont la direction rencontre cet axe sont détruites par lui, puisqu'elles peuvent être appliquées à ce point de rencontre qui est fixe.

Nous admettrons comme résultat de l'expérience ou comme axiome, que toute force dont la direction ne passe pas dans le premier cas par le point fixe, et dans le second par un point de l'axe fixe, ne sera pas détruite et déplacera le système.

6° Une force appliquée en un point d'un système libre ne peut être transportée parallèlement à elle-même en un point qui ne serait pas sur sa direction. Elle ne peut même être remplacée par aucune autre, qui n'agirait pas suivant la même droite. Il résulte de là que lorsqu'on sait qu'une force appliquée à un point libre peut, sans changer d'effet, être appliquée à un autre lié au premier, ce second point est sur la direction de la force.

7° Deux forces qui ne sont pas égales et opposées ne peuvent pas se faire équilibre sur un système libre.

8° Lorsqu'un système quelconque est en équilibre, on peut y ajouter ou supprimer des parties matérielles qui n'altèrent pas les liaisons des points auxquels les forces sont appliquées.

On peut rendre fixes des points du système qui pouvaient se déplacer, et l'équilibre qui existait ne sera pas troublé. Mais, après cela, il sera permis d'introduire des forces qui, agissant seules sur le système ainsi modifié, s'y détruiraient, et de supprimer des forces telles, que les contraires appliquées seules s'y détruiraient.

9° Un groupe de forces peut en remplacer un premier sur un système donné quelconque lorsqu'il serait en équilibre sur ce système avec le contraire de ce premier, c'est-à-dire avec un groupe composé de forces égales respectivement à celles du premier, et appliquées aux mêmes points en sens contraires.

Il faut bien remarquer que cela n'entraîne pas que le premier groupe pourrait réciproquement remplacer l'autre sur le même système.

En d'autres termes, un groupe de forces peut être *équivalent* à un autre, relativement à un système de points, sans que ce dernier soit équivalent au premier sur le même système.

CHAPITRE II.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DE FORCES APPLIQUÉES A UN MÊME POINT

29. La recherche de la résultante, ou la *composition* de forces en nombre quelconque appliquées à un même point, se ramène à la composition de deux seulement, car si l'on cherche d'abord la résultante de deux quelconques des forces, cette résultante, qui peut les remplacer, étant composée avec une troisième, donnera une résultante qui pourra remplacer ces trois forces; en la composant avec une quatrième, on aura une force qui pourra remplacer ces quatre, et, en continuant ainsi jusqu'à la dernière, on obtiendra une force qui pourra les remplacer toutes, et pourrait, réciproquement, être remplacée par elles dans tout système rigide ou non rigide. Cherchons donc d'abord la résultante de deux forces appliquées à un point libre.

30. *Composition de deux forces. — Parallélogramme des forces.*

La résultante étant appliquée au point auquel ces forces le sont elles-mêmes, il ne s'agit plus que de trouver sa direction et son intensité.

On commence ordinairement par s'occuper de la direction, et on distingue deux cas, celui ou les deux forces ont une commune mesure, et celui où elles n'en ont pas. Dans le premier cas, la considération répétée de deux forces égales appliquées à un même point, et qui peuvent être transportées parallèlement à elles-mêmes en un point

quelconque de la bissectrice, conduit à cette conséquence que :

La résultante de deux forces commensurables appliquées à un même point peut, sans changer d'effet, être transportée parallèlement à elle-même à l'extrémité de la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent les forces en grandeur et en direction.

On conclut de là que cette extrémité de la diagonale est sur la direction de la résultante, qui n'est donc autre que celle de cette diagonale même. Si les forces sont incommensurables, on arrive à la même conclusion, soit par la considération des limites, soit par la réduction à l'absurde.

Corollaire. — Cette proposition générale permet réciproquement de trouver le rapport de deux forces appliquées à un même point lorsqu'on connaît leurs directions et celle de la résultante.

31. Pour en déterminer l'intensité, on remarque qu'il y aurait équilibre entre les deux forces données et une troisième égale et opposée à la résultante. Cette troisième et l'une des deux premières auraient donc pour résultante une force de direction opposée à la seconde, et comme, par conséquent, on connaît le rapport de cette troisième à la première qui est donnée, on connaîtra donc cette troisième, qui est égale à la résultante cherchée.

Les constructions simples qui représentent ce qui vient d'être énoncé montrent que l'intensité de la résultante est représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces. D'où résulte ce théorème fondamental :

La résultante de deux forces quelconques appliquées à un même point, est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit

sur les lignes qui représentent ces forces en grandeur et en direction.

La réciproque, ou la décomposition d'une force en deux autres passant au même point, est évidente.

32. *Remarque.* — Cette diagonale partage le parallélogramme en deux triangles dont les côtés représentent les deux forces et leur résultante, et dont les angles sont ceux que font entre elles les directions de ces trois forces. D'où résulte que les divers problèmes que l'on peut se proposer sur les grandeurs et les directions de deux forces et de leur résultante, se ramènent immédiatement à la construction ou au calcul d'un triangle.

33. *Parallélépipède des forces.* — Lorsque trois forces non dans un même plan sont appliquées à un même point, on trouve, en les composant successivement, que la résultante est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélépipède construit sur les trois forces. Cette diagonale ne peut se réduire à zéro que lorsque les trois composantes sont séparément nulles. C'est donc le seul cas où les trois forces non dans un même plan ne déplaceront pas le point libre auquel elles sont appliquées.

On voit que les divers problèmes auxquels peut donner lieu la considération de trois forces appliquées à un point et de leur résultante, sont ramenés à la construction ou au calcul d'un parallélépipède. Le plus simple de ces problèmes, après le précédent, est celui qui a pour objet de décomposer une force en trois autres appliquées au même point, dans des directions données. Il revient à trouver les trois arêtes d'un parallélépipède, connaissant la grandeur et la direction de la diagonale, ainsi que les directions des arêtes.

34. *Forces en nombre quelconque.* — La composition

successive de ces forces, que nous avons indiquée en commençant, conduit au résultat suivant, d'après la règle du *parallélogramme* des forces.

« Par l'extrémité de la droite qui représente l'une quelconque des composantes, menez une droite parallèle à l'une des autres, de même sens et égale; par l'extrémité de celle-ci, une droite parallèle à l'une de celles qui restent, de même sens et égale, et continuez ainsi jusqu'à la dernière composante, en les prenant dans un ordre quelconque; la droite qui joindra le point d'application des forces à l'extrémité de la dernière droite construite, représentera la résultante en grandeur et en direction. »

On voit que, si toutes les forces changeaient de sens sans changer de grandeur, il en serait de même de la résultante.

Il suit de là que, si cette ligne polygonale était fermée, la force à laquelle les proposées sont réduites, serait nulle, et les forces seraient en équilibre, et réciproquement.

Mais, comme les constructions sont le plus ordinairement moins commodes que les calculs, il est utile de traduire le théorème précédent en formules algébriques. Nous commencerons par chercher directement ces formules, puis nous indiquerons comment elles pourraient être déduites de ce théorème.

RÉDUCTION DE TOUTES LES FORCES À TROIS AUTRES DIRIGÉES SUIVANT DES AXES FIXES QUELCONQUES.

35. Si, par le point d'application de ces forces, on mène trois axes arbitraires, et qu'on décompose chaque force en trois autres dirigées suivant ces axes, toutes les composantes situées sur un même axe se réduiront à une seule, égale à l'excès de la somme de celles qui agissent dans

un sens sur la somme de celles qui agissent en sens contraire; et cette force sera dirigée dans le sens de la plus grande des deux sommes. L'ensemble des forces données sera donc remplacé par trois forces agissant suivant les axes choisis, et dans un sens bien déterminé pour chacune; et pour avoir leur résultante, qui sera celle du système, il suffira d'appliquer la règle du parallélépipède des forces.

On parviendrait au même résultat en considérant la ligne polygonale qui fait connaître la seconde extrémité de la résultante. En effet, si l'on décompose cette dernière suivant les trois axes, en menant par son extrémité trois plans parallèles à ceux des axes pris deux à deux, et qu'ensuite on mène par tous les sommets de la ligne polygonale des plans parallèles à ceux des axes, on voit clairement que chacune des trois composantes de la résultante est égale à la résultante des composantes partielles que donneraient toutes les forces proposées, suivant ces mêmes axes.

INTRODUCTION DES SIGNES DANS LES FORCES.

36 Nous avons dit que toutes les composantes suivant un même axe, se réduisaient à une seule force égale à la différence entre la somme de celles qui agissent dans un sens et la somme de celles qui agissent dans l'autre, et que cette force agit dans le sens de la plus grande somme.

Cet énoncé peut être simplifié et réduit à la même forme que quand toutes les forces sont dans le même sens. Il suffit de considérer comme des nombres absolus ceux qui mesurent les forces dirigées dans l'un des deux sens choisi arbitrairement, et comme des nombres négatifs ceux qui expriment les forces de sens contraire. En effet, si l'on ajoute, suivant les règles des signes, tous ces nombres, tant positifs que négatifs, on aura une somme dont la valeur absolue exprimera la grandeur de la résultante, et dont le

signe, indiquant laquelle des deux sommes est la plus forte, fera connaître le sens de cette résultante. L'énoncé général sera ainsi formulé :

Les forces agissant suivant une même droite se composent en une seule égale à leur somme, et agissant dans le sens indiqué par son signe.

On voit encore ici que nous n'avons introduit les signes dans les forces que pour généraliser l'énoncé d'une proposition.

Si l'on désigne par X, Y, Z les composantes, ainsi entendues, de l'une quelconque des forces, les composantes de la résultante suivant les axes seront

$$\sum X, \quad \sum Y, \quad \sum Z$$

37. *Cas où les axes sont rectangulaires.* — Lorsque les trois axes sont rectangulaires, l'expression des composantes leur donne précisément les signes qui conviennent à la généralisation que nous venons d'indiquer.

En effet, soit P l'une quelconque des forces données, α, β, γ les angles que sa direction fait avec les trois sens que l'on a choisis sur les axes, les composantes seront

$$P\cos\alpha, \quad P\cos\beta, \quad P\cos\gamma,$$

à la condition de regarder comme positives celles qui feront des angles aigus avec les axes positifs, et comme négatives celles qui feront des angles obtus, P étant toujours considéré comme un nombre absolu. En ajoutant toutes celles qui sont suivant un même axe, on aura les trois résultantes des forces données, qui seront

$$\sum P\cos\alpha, \quad \sum P\cos\beta, \quad \sum P\cos\gamma.$$

Connaissant ainsi la grandeur et le signe des composantes, on connaîtra la résultante R et les angles a, b, c qu'elle fait avec les axes.

Dans le cas des axes quelconques, X, Y, Z désignant en grandeur et en signes les composantes de la résultante, les équations de celles-ci seront

$$r = \frac{X}{Z}z, \quad r' = \frac{Y}{Z}z.$$

38. *Équations d'équilibre.* — Pour que des forces appliquées à un même point soient en équilibre, il faut que la force unique à laquelle on les réduit soit nulle, et par conséquent que ses trois composantes suivant des axes obliques ou rectangulaires soient séparément nulles, ce qui donne les trois équations

$$\sum X = o, \quad \sum Y = o, \quad \sum Z = o.$$

Dans le cas des axes rectangulaires, ces équations deviennent

$$\sum P \cos\alpha = o, \quad \sum P \cos\delta = o, \quad \sum P \cos\gamma = o.$$

Si toutes les forces étaient dans un même plan, il serait convenable de les décomposer suivant deux axes situés dans ce plan, et alors on aurait, pour les composantes de la résultante,

$$\sum X, \quad \sum Y,$$

et pour conditions d'équilibre,

$$\sum X = o, \quad \sum Y = o.$$

Mais on pourrait avoir des raisons de conserver les trois axes, et les forces, n'étant dans aucun des plans de ces axes, devraient encore être décomposées en trois forces suivant ces axes, et la résultante aurait encore pour composantes $\sum X$, $\sum Y$, $\sum Z$. Mais il ne faudrait plus trois

équations : deux d'entre elles entraîneraient la troisième.

En effet, si l'équation du plan des forces est

$$z = ax + by,$$

on aura, pour chacune des forces,

$$Z = aX + bY;$$

donc

$$\sum Z = a \sum X + b \sum Y,$$

et les deux équations $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$ entraînent la troisième et suffisent par conséquent.

Si toutes les forces étaient en ligne droite, la seule équation $\sum X = 0$ entraînerait les deux autres et suffirait par conséquent.

CHAPITRE III.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES PARALLÈLES.

39. Le système de deux forces parallèles appliquées à un système rigide libre, c'est-à-dire dont le déplacement n'est assujetti à aucune condition, peut être considéré comme un cas limite de deux forces concourantes.

On peut, en effet, leur substituer d'abord deux forces passant par les mêmes points d'application et concourant en un même point qui s'éloigne indéfiniment sur une droite parallèle aux forces; la limite de la résultante de ces forces sera la résultante des deux proposées. On obtient facilement ainsi la solution de la question.

On peut aussi considérer directement les deux forces parallèles, comme l'a fait Archimède, qui n'a pas connu la composition des forces concourantes : c'est la solution adoptée par Poinsot dans sa *Statique*.

On peut, enfin, ramener le cas des forces parallèles à celui des forces concourantes, non comme limite, mais par la simple introduction de deux forces qui se détruisent sur le système rigide, et qui, par leur combinaison avec les deux proposées, ramènent immédiatement à la règle du parallélogramme des forces, et finalement à la résultante cherchée. On parvient ainsi à cette proposition :

« Deux forces parallèles de même sens ont une résul- » tante égale à leur somme;

» Si elles sont de sens différents, et inégales, elles ont » une résultante égale à leur différence et dirigée dans le » sens de la plus grande.

» Si elles sont de sens différents et égales, elles n'ont
» pas de résultante. Et il faut bien remarquer qu'elles ne
» sont pas en équilibre sur le système; car il y aurait en-
» core équilibre en y fixant un axe rencontrant l'un des
» deux forces seulement. La force restante, qui ne ren-
» contre pas l'axe, ne devrait donc pas mettre le système
» en mouvement; ce qui est contraire à l'un de nos prin-
» cipes.

» Quand il y a une résultante, elle est dans le plan des
» composantes, et rencontre la droite qui joint leurs points
» d'application en un point tel, que chacune des trois forces
» est proportionnelle à la partie de cette droite, comprise
» entre les deux autres. »

40. Quoiqu'une force puisse toujours être appliquée en un point quelconque de sa direction, lié au premier, on appelle spécialement *point d'application de la résultante*, celui où elle rencontre la droite qui passe par les points auxquels sont réellement appliquées les composantes. Ce point jouit de la propriété remarquable d'être indépendant de la direction des composantes, et même de leur grandeur absolue; il ne dépend que du parallélisme, du sens relatif et du rapport des deux composantes.

41. *Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles.* — En composant ensemble toutes les forces de même sens, on arrive, dans le cas le plus général, à deux forces de sens contraire. Si elles sont égales, et non directement opposées, il n'y a pas de résultante; et si elles sont directement opposées, il y a équilibre. Si elles sont inégales, il existe une résultante égale à la différence entre les deux sommes des forces respectivement de même sens et dirigée dans le sens de la plus grande somme, son point d'application se déterminera comme nous l'avons dit.

Centre des forces parallèles. — En composant d'abord

deux des forces de même sens, puis leur résultante avec une troisième de même sens, et ainsi de suite jusqu'à la dernière de celles de même sens, et prenant toujours pour point d'application des résultantes partielles successives celui que nous avons défini précédemment; agissant de même pour les forces du sens opposé, et de même pour la composition de ces deux résultantes de sens contraires, on obtient, si elles sont inégales, une résultante dont le point d'application ne dépend ni de la direction des forces, ni de leurs grandeurs absolues, mais simplement du sens respectif et du rapport des forces. On le nomme *centre des forces parallèles*.

THÉORÈME DES MOMENTS — SON USAGE.

42. Nous venons de ramener la détermination de la résultante à celle du centre des forces parallèles; mais le procédé qui nous a conduit à démontrer son existence est peu commode pour sa détermination.

Les points d'application des forces sont donnés par leurs coordonnées, et il est naturel de chercher à déterminer le centre par les siennes; de sorte qu'on est naturellement conduit à chercher des équations entre ces dernières, celles des points donnés et les grandeurs des forces. Par des raisons générales, données ailleurs, les coordonnées devront être considérées avec leurs signes, comme dans toutes les équations démontrées jusqu'ici : sans quoi, dans une même question, il faudrait entendre de différentes manières des choses qui recevraient le même nom. Et si, en agissant ainsi, on ne pouvait avoir d'équations générales, on serait obligé de distinguer plusieurs cas, ce qui n'aurait d'inconvénients que sous le rapport de la simplicité.

Heureusement que les deux sens que présentent les forces offrent une ressource qu'on pourra utiliser; et l'on recon-

naîtra effectivement que les équations que nous cherchons peuvent s'énoncer et s'écrire d'une manière unique pour tous les cas, en considérant les signes des coordonnées comme nous l'avons fait jusqu'ici, et, de plus, en regardant les forces dirigées dans l'un des sens comme représentées par des nombres absolus, et par des nombres négatifs celles qui sont dirigées dans le sens opposé.

43. En considérant d'abord deux forces parallèles, de même sens, et un plan quelconque par rapport auquel leurs points d'application soient d'un même côté, les relations qui existent entre les grandeurs des forces et de leur résultante et les distances des points d'application de ces trois forces, conduisent à cette proposition :

« Si l'on fait les produits de chacune des deux forces et
» de leur résultante par les distances respectives, obliques
» ou rectangulaires, de leurs points d'application au plan,
» la somme des deux premiers sera égale au troisième.
» Mais si les points d'application des diverses n'étaient pas
» d'un même côté du plan, ce serait la différence des pro-
» duits qu'il faudrait substituer à la somme, et le point
» d'application de la résultante serait du même côté que
» celui qui correspond au plus grand produit. »

On voit par là quelles sont les diverses circonstances qu'il est nécessaire d'examiner, et l'on reconnaîtra facilement que les différentes équations qui leur correspondent peuvent être renfermées dans une seule, en regardant comme positives les perpendiculaires situées d'un côté du plan, et comme négatives celles qui sont situées de l'autre. En désignant sous le nom de *moment*, par rapport au plan, le produit d'une force par la perpendiculaire, positive ou négative, abaissée de son point d'application sur le plan, et regardant les forces comme des grandeurs absolues, l'équation qui renferme tous les cas s'énoncera ainsi :

Le moment de la résultante par rapport à un plan quelconque est égal à la somme des moments des composantes.

Si les deux forces n'étaient pas de même sens, cette équation se trouverait modifiée dans les signes des termes. Mais on reconnaît facilement qu'on se procurera l'avantage de réunir ces diverses formes en une seule, en considérant comme positives les forces dirigées dans l'un des deux sens choisi à volonté, et comme négatives, celles qui sont dirigées en sens contraire.

44. *Cas d'un nombre quelconque de forces.* — En appliquant ce théorème à deux des forces, puis à leur résultante et une troisième force, et ainsi de suite, jusqu'à la dernière, on arrive sans difficulté au théorème suivant :

« Lorsque des forces parallèles quelconques ont une résultante, le moment de cette force par rapport à un plan quelconque est égal à la somme des moments des composantes, à la condition de regarder les forces dirigées dans un sens comme positives, et celles qui sont dirigées en sens contraire comme négatives; les perpendiculaires situées d'un côté du plan comme positives, et celles situées de l'autre comme négatives; et en entendant que les sommes et les produits seront faits suivant les règles démontrées dans l'addition et la multiplication des polynômes. »

On voit ici, comme toujours, que les quantités négatives sont introduites pour renfermer plusieurs formules en une seule, et qu'il n'y a aucune règle à démontrer sur ces quantités négatives isolées, puisque la manière de les traiter a été une condition de la généralisation, fournie par la comparaison des formes diverses des équations.

EXPRESSION DE LA RÉSULTANTE ET DES COORDONNÉES DE SON POINT D'APPLICATION.

Soient P, P', P'',... les nombres positifs ou négatifs qui expriment les forces; x, y, z les coordonnées du point d'application de la force P; x', y', z' celles du point d'application de P', et ainsi de suite; R, la valeur de la résultante en grandeur et en signe, x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son point d'application, ou du centre des forces parallèles. On aura, d'après ce qui vient d'être dit, en prenant les moments successivement par rapport à chacun des plans coordonnés,

$$R = P + P' + P'' + \ldots,$$
$$Rx_1 = Px + P'x' + P''x'' + \ldots,$$
$$Ry_1 = Py + P'y' + P''y'' + \ldots,$$
$$Rz_1 = Pz + P'z' + P''z'' + \ldots.$$

On connaîtra donc immédiatement la grandeur et le sens de la résultante, et les coordonnées de son point d'application.

ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE DES FORCES PARALLÈLES.

45. Il faut d'abord s'expliquer nettement sur la position de la question, et déclarer si l'on veut des équations qui assurent l'équilibre, quelle que soit la direction des forces, comme nous avons trouvé la détermination du point d'application de la résultante, quand elle existe; ou bien si l'on veut des équations qui assurent l'équilibre de forces parallèles à une direction bien déterminée.

1° Supposons d'abord que l'équilibre doive avoir lieu, quelle que soit la direction des forces, et commençons, comme nous l'avons déjà fait, par réduire le système de toutes les forces aux deux résultantes des forces respective-

ment de même sens : pour qu'il y ait équilibre, il faut que ces deux forces soient égales et directement opposées.

D'abord, pour qu'elles soient égales et de sens contraire il faudra que l'on ait

$$P + P' + P'' + \ldots = 0.$$

Pour qu'elles soient directement opposées, quelle que soit leur direction, il faut que les deux points d'application des résultantes partielles, égales et de sens contraire, coïncident.

Or, pour que deux points coïncident, il est nécessaire et suffisant que leurs coordonnées soient égales et de mêmes signes, par rapport à trois plans passant par un même point

Ainsi, en considérant d'abord les x des deux points, il faudra, pour qu'ils soient égaux et de même signe, qu'en les multipliant par les résultantes correspondantes qui sont égales et de signe contraire, la somme soit nulle. Et comme cette somme est égale à la somme totale des moments $Px + P'x' + P''x'' + \ldots$, il faudra que cette dernière soit nulle. Il en serait de même pour les deux autres axes; et les conditions de l'équilibre seront

$$(1) \qquad P + P' + P'' + \ldots = 0,$$

$$(2) \qquad \begin{cases} Px + P'x' + P''x'' + \ldots = 0, \\ Py + P'y' + P''y'' + \ldots = 0, \\ Pz + P'z' + P''z'' + \ldots = 0 \end{cases}$$

Si tous les points d'application sont dans un même plan, la troisième des équations (2) rentre dans les deux autres.

S'ils sont en ligne droite, les équations (2) se réduisent à une, la direction des forces restant indéterminée.

46. Si l'équilibre doit avoir lieu pour une seule direction bien déterminée, il ne sera plus nécessaire que les

points d'application des deux résultantes partielles coïncident; il suffira qu'ils soient sur une droite parallèle aux forces. Si donc on prend les deux plans ZX, ZY, parallèles à la direction des forces, il suffira que les deux points d'application aient le même x et le même y; ce qui n'exige plus que deux équations. Les équations d'équilibre seront alors, par rapport à des axes quelconques, parallèles aux forces :

$$(3)\qquad \begin{cases} P + P' + P'' + \ldots = 0, \\ Px + P'x' + P''x'' + \ldots = 0, \\ Py + P'y' + P''y'' + \ldots = 0. \end{cases}$$

Si l'on voulait conserver aux axes des directions arbitraires, en supposant aux forces une direction déterminée, l'équation (1) subsiste toujours, et si l'on suppose les forces parallèles à la droite $x = az$, $y = bz$, les conditions pour que les points d'application des deux résultantes partielles soient sur une parallèle à cette droite seront

$$\sum Px = a\sum Pz, \quad \sum Py = b\sum Pz;$$

ce seront les conditions d'équilibre.

Si l'on a $a = 0$, $b = 0$, on retombe sur les équations (3).

47. Si en laissant les axes quelconques, on suppose toutes les forces dans un même plan

$$mx + ny + pz + q = 0,$$

il faudra d'abord que la droite $x = az$, $y = bz$ soit parallèle à ce plan, ce qui donne

$$am + bn + p = 0,$$

et les équations

$$\sum Px = a\sum Pz, \quad \sum Py = b\sum Pz,$$

que nous venons d'établir pour le cas général d'une direc-

tion fixe des forces, deviendront, en remplaçant les z par leur valeur tirée de l'équation du plan,

$$\sum b\mathrm{P}x = a\sum \mathrm{P}y, \quad a\sum \mathrm{P}y = b\sum \mathrm{P}x,$$

qui n'en font qu'une.

Les équations d'équilibre seront dans ce cas

$$\sum \mathrm{P} = 0, \quad \sum \mathrm{P}x = \frac{a}{b}\sum \mathrm{P}y,$$

et il est remarquable qu'elles ne dépendent pas de la position du plan des forces.

Si l'on voulait que les forces fussent dans le plan des x et y, il faudrait que les équations de la droite parallèle, qui sont

$$x = az, \quad y = bz, \quad x = \frac{a}{b}y,$$

se réduisissent à $z = 0$, $x = ky$, k étant un nombre donné.

On fera tendre la droite vers cette position, en faisant croître a et b indéfiniment, en conservant le rapport $\frac{a}{b} = k$, et il faudra, dans les équations précédentes, remplacer $\frac{a}{b}$ par k, ce qui donnera

$$\sum \mathrm{P}x = k\sum \mathrm{P}y.$$

Si les forces étaient parallèles à l'axe des y, on aurait $k = 0$, et les équations d'équilibre seraient

$$\mathrm{P} = 0, \quad \sum \mathrm{P}x = 0.$$

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES COUPLES.

48. Nous avons reconnu que deux forces parallèles égales, de sens contraire, mais non directement opposées, ap-

pliquées à deux points liés invariablement l'un à l'autre, ne sont pas réductibles à une force unique, et ne sont pas non plus en équilibre.

On s'était contenté de cette remarque jusqu'à Poinsot, qui a fait de ces singuliers assemblages de forces, un élément essentiel de la théorie de l'équilibre et du mouvement. Nous les désignerons, avec lui, sous le nom de *couples*.

L'objet de cet Ouvrage étant de faire connaître l'enchaînement et la liaison des idées, en partant des données premières, nous nous bornerons ici à indiquer les principes sur lesquels se fonde l'emploi des couples : les théories suivantes en montreront l'usage.

Il faut d'abord choisir le moyen le plus simple pour déterminer chaque couple en particulier, de manière qu'il ne puisse être confondu avec aucun autre. Pour la détermination d'une force, on donne son point d'application, sa direction et son rapport à une force particulière, prise pour unité : voyons ce qu'il convient de donner pour la détermination d'un couple, sans s'occuper aucunement de l'effet qu'il produirait sur le corps auquel il serait appliqué.

La première chose à faire connaître, c'est le plan dans lequel se trouvent les deux forces qui forment le couple; ensuite la position et le sens de chacune des deux forces dans ce plan. Mais ces données peuvent être remplacées par d'autres beaucoup plus simples. Pour faciliter le langage, nous appellerons *bras de levier* d'un couple une perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de l'une des forces sur l'autre, et nous prendrons ses extrémités pour les points d'application de ces forces.

49. Cela posé, on démontre facilement que, quel que soit l'effet d'un couple, il ne sera pas changé si on le déplace d'une manière quelconque dans son plan, en y faisant

prendre à son bras de levier une position et une direction arbitraires, pourvu qu'il soit lié invariablement à sa position première. On démontre en second lieu que l'effet sera le même si l'on transporte ensuite le couple parallèlement à lui-même, dans un plan quelconque parallèle au premier, pourvu toujours que dans sa nouvelle position son bras de levier soit lié invariablement à la précédente.

La conséquence à tirer de là, c'est qu'il est inutile de donner le plan même dans lequel se trouve le couple, mais seulement un plan quelconque qui lui soit parallèle; et dans ce plan on peut prendre telle position qu'on voudra pour le bras de levier donné, en ayant soin que les deux forces perpendiculaires à ce bras soient dans des directions qui permettent la coïncidence des deux couples, par un simple déplacement dans le plan.

50. La détermination de cette dernière condition tout à fait indispensable, se fera au moyen de l'image suivante.

Supposons qu'on fixe le milieu du bras de levier qui pourra prendre diverses positions autour de ce point, et qu'un observateur se place dans la perpendiculaire menée par ce point en appuyant ses pieds sur le plan. Imaginons ensuite que le bras de levier tourne de manière que chacune de ses extrémités se déplace dans le sens où elle est tirée par la force qui lui est appliquée. L'observateur verra ce déplacement s'effectuer de sa gauche vers sa droite, ou de sa droite vers sa gauche. Mais s'il se plaçait sur le prolongement de la perpendiculaire, de l'autre côté du plan, sur lequel il aurait toujours les pieds appuyés, cette même rotation lui apparaîtrait en sens inverse. Cela posé, nous convenons de considérer toujours celle des deux directions de la perpendiculaire, pour laquelle la rotation paraîtra s'exécuter de gauche à droite, nous la nommerons *direction de l'axe du couple*, et le sens de cette rotation sera appelé *direct*.

Il suffira donc, pour la complète détermination d'un couple, de faire connaître la direction de son axe, prise à partir d'un point arbitraire, l'intensité des forces, et la grandeur du bras de levier.

51. Enfin on opérera une dernière simplification en se fondant sur cette proposition, qu'on peut, sans changer l'effet d'un couple, changer la force et le bras de levier, pourvu que leur produit reste le même.

Il en résulte en effet qu'il est inutile de connaître séparément la force et le bras de levier, mais qu'il suffit d'en connaître le produit, auquel nous donnerons le nom de *moment* du couple. Nous le représenterons par une longueur portée sur la direction de l'axe, à partir du point arbitraire par lequel on aura mené cet axe; nous appellerons cette longueur la *grandeur* de l'axe; et, en entendant ainsi les choses, nous pourrons dire :

Un couple est complètement déterminé par la direction et la grandeur de son axe.

Remarque. — Le moyen que nous venons d'indiquer pour fixer le sens d'une rotation peut, au premier abord, paraître bizarre, comme étant fondé sur la conformation particulière de l'homme, et l'on désirerait peut-être en trouver un plus géométrique. Mais ce serait se faire une grande illusion; car il n'est ni axes, ni équations qui puissent faire distinguer l'un de ces deux sens de l'autre.

Concevons, par exemple, dans un plan, deux axes rectangulaires AX, AY, et un cercle de rayon R ayant son centre en A. Un point partant du point B de rencontre de ce cercle avec AX peut tourner dans deux sens différents que l'on peut faire correspondre aux valeurs d'un angle partant de zéro et prenant des valeurs positives, ou des valeurs négatives. On pourra donc bien exprimer d'une manière différente le sens de la rotation par laquelle le rayon

vecteur du point commence par marcher vers l'axe des y positifs, ou vers l'axe des y négatifs. Mais rien ne peut caractériser aucune de ces rotations, qui ont cependant chacune une existence absolue et différente. Dire qu'un déplacement se fait de AX vers AY ne détermine rien, puisque les axes peuvent avoir deux positions relatives, et la difficulté serait de les distinguer; ce que ni la géométrie ni le calcul ne peuvent faire. Il n'y a que la conformation de l'homme qui puisse ici lui venir en aide; sa vue s'exerce d'un seul côté, et sa droite ne peut être confondue avec sa gauche. Lors donc qu'il dit qu'il voit un point tourner autour de lui, de sa gauche vers sa droite, ses pieds reposant sur le plan dans lequel s'effectue cette rotation, tous les hommes auront la connaissance précise du sens de cette rotation, et ne le confondront pas avec le sens contraire.

De même, la position relative de deux axes rectangulaires sur un plan, se distinguera en commençant par faire choix du côté du plan où l'on veut se placer, et en disant si la rotation qui amènerait l'axe des x positifs sur l'axe des y positifs, en lui faisant décrire un angle droit, est *directe*, ou *rétrograde*, c'est-à-dire inverse.

Dans le cas de trois axes rectangulaires, il y a une circonstance qui ne se présente pas quand il n'y a que deux axes. Dans ce dernier cas, en se plaçant d'un côté convenable du plan, on aura les axes dans la position relative que l'on voudra, et en retournant le plan des deux axes, on les ferait coïncider avec ceux qui étaient placés dans la position inverse; et alors les formules ne dépendront pas de cette position relative. Mais si l'on a deux systèmes de trois axes se succédant, les uns dans l'ordre XYZ, les autres dans l'ordre YXZ, il sera impossible, par aucun déplacement, d'amener les axes positifs de l'un des systèmes, sur ceux de l'autre. Et de là pourront résulter des différences dans les formules dépendantes de deux systèmes d'axes,

suivant qu'ils seront dans le même ordre, ou en ordre inverse.

Ces deux dispositions possibles des x, y, z, qu'aucun déplacement ou retournement ne peut amener à coïncider, ne peuvent se distinguer l'un de l'autre qu'en disant si l'observateur placé dans l'axe positif des z, les pieds appliqués sur le plan xy, verrait l'axe des x positifs marcher vers l'axe des y positifs, par une rotation directe ou rétrograde, qui amènerait la coïncidence des deux axes, lorsque le premier aurait tourné d'un angle droit.

Comme exemple de figure susceptible de deux sens impossibles à distinguer par des équations ou procédés géométriques, nous citerons encore les deux hélices de même pas qui, tracées sur un cylindre, en imprimant des rotations inverses aux projections des deux points décrivants, ne peuvent jamais être amenées à coïncider. Elles sont essentiellement différentes, et forment deux types distincts. Or il n'y a aucun moyen purement mathématique de désigner l'un de ces deux types en particulier. On pourra bien former deux systèmes d'équations qui représentent les deux types, mais tous les procédés purement géométriques seront insuffisants pour les distinguer.

Il est encore nécessaire pour cela de recourir à la même image, et de supposer un observateur placé dans l'axe, les pieds appuyés sur la base du cylindre et regardant les deux points qui s'élèvent en tournant. En indiquant le sens dans lequel tourne la projection du point décrivant, on a l'un des types, parfaitement caractérisé. Ces deux types, par suite de cette image même qui permet de les distinguer, ont été désignés sous le nom d'hélice *dextrorsum*, et d'hélice *sinistrorsum*.

Le règne végétal et le règne minéral en offrent des exemples.

COMPOSITION DES COUPLES.

32 1° *Cas où les axes sont parallèles.* — Si les couples sont dans des plans parallèles, on les ramènera dans un même plan, on les transformera en d'autres qui auront un même bras de levier et les mêmes moments respectifs que les couples donnés, puis on amènera tous ces bras de levier à coïncider. Il est visible alors que toutes les forces se réduiront à deux égales et contraires formant un couple ayant le bras de levier commun, et pour valeur des forces qui le forment, la différence entre la somme de toutes celles des couples dans un sens, et celles des couples de sens contraire, et agissant dans le sens de la plus grande somme, ce qui donne la proposition suivante :

« Des couples situés dans des plans parallèles se composent toujours en un seul, situé dans un plan parallèle, » ayant un moment égal à la différence entre la somme » des moments des couples agissant dans un sens, et la » somme des moments des couples de sens contraire, et » agissant dans le sens de ceux qui donnent la plus forte » somme. »

Cette proposition peut s'énoncer plus simplement comme il suit :

« Pour composer des couples dont les axes sont parallèles, il suffit de transporter en un même point tous ces » axes qui seront alors en ligne droite, de faire la somme » de tous ceux qui sont du même côté de l'origine commune, et de retrancher la plus petite de la plus grande ; » le reste représentera, en direction et en grandeur, l'axe » du couple résultant. »

Et si, pour simplifier encore cet énoncé, on considère comme positifs les axes dirigés dans un sens, et comme négatifs ceux qui sont dirigés en sens contraire, ce qui n'est nullement obligatoire, on énoncera ainsi le théorème :

« Des couples quelconques ayant leurs axes parallèles » se composent en un seul dont l'axe, parallèle aux pre- » miers, est représenté en grandeur et en direction par la » somme algébrique des axes des couples donnés. »

D'où l'on voit que la composition des couples qui ont leurs axes parallèles est identique à celle de forces agissant suivant une même droite.

2° *Cas où les axes ne sont pas parallèles.* — En considérant d'abord deux couples seulement, et transportant leurs axes en un même point, on reconnaît facilement *qu'ils se composent en un seul représenté en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les axes des couples donnés.*

Il est inutile de faire remarquer que composer des couples dont les axes sont donnés, c'est composer des couples dont les plans et les moments sont donnés, et cette seconde question peut facilement être traitée directement, il en est de même pour la décomposition d'un couple.

Cette composition des axes est identique à celle de deux forces qui seraient substituées aux axes, et l'on obtient ainsi la règle générale suivante, qui comprend les deux cas, et qui ramène à une question déjà traitée :

Pour composer des couples en nombre quelconque et dont les axes ont des directions quelconques, il suffit de transporter les axes de ces couples en un même point qui soit leur origine commune, et de composer ces axes comme s'ils représentaient des forces; la résultante de celles-ci représentera en direction et en grandeur l'axe du couple résultant.

Il est visible que cette composition ne donne lieu à aucun cas d'exception, comme on en a rencontré dans le cas des forces parallèles.

Conditions d'équilibre des couples. — Tous ces couples peuvent toujours se réduire à un seul dont on peut, par ce

qui précède, déterminer le moment. Mais si ce couple existe, nous savons qu'il ne peut être en équilibre sur un système rigide libre, il est donc évident qu'il faut, ou que les deux forces qui le composent soient nulles, ou que ces forces soient directement opposées, c'est-à-dire que le bras de levier soit nul. Il n'y a donc évidemment équilibre que si le moment du couple résultant est nul.

Or la condition d'équilibre de forces appliquées à un même point est aussi que leur résultante soit nulle. On peut donc énoncer le théorème suivant, en se dispensant de reproduire ce qui a été dit sur l'équilibre de forces appliquées à un même point :

« Pour avoir les équations qui expriment l'équilibre de » couples en nombre quelconque, il suffit de transporter » tous leurs axes parallèment à eux-mêmes en un même » point, de les considérer comme représentant des forces » en grandeur et en direction, et d'exprimer que ces forces » sont en équilibre. »

Si les couples sont dans des plans parallèles, il faut donc que la somme algébrique de leurs moments soit nulle. Dans le cas général on les décomposera suivant trois axes, et l'on aura, comme pour les forces, trois équations d'équilibre.

CHAPITRE IV.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DE FORCES QUELCONQUES APPLIQUÉES A UN SYSTEME RIGIDE LIBRE.

53. *Première réduction des forces.* — Toute force appliquée en un point d'un système rigide peut être remplacée par une force égale, parallèle et de même sens, appliquée à un point quelconque lié invariablement au système, plus un couple dont l'une des forces sera la proposée, et la seconde passera par le point choisi. C'est ce que l'on aperçoit immédiatement en introduisant à ce point deux forces égales et contraires, parallèles à la première.

Si l'on fait cette transformation pour toutes les forces appliquées au système, leur ensemble sera remplacé par ces mêmes forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un point choisi arbitrairement et lié au système, plus un nombre égal de couples bien déterminés.

Or toutes les forces appliquées à un même point se réduisant à une seule, et tous les couples à un seul, on peut donc énoncer la proposition suivante :

Des forces, en nombre quelconque, appliquées à un corps solide, ou à un système rigide quelconque, peuvent toujours être réduites à une force et un couple.

Cette force est la résultante de toutes les proposées transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque lié au système. Sa grandeur et sa direction sont donc indépendantes de ce point.

Les couples composants et le couple résultant dépendent du point choisi.

54. *Conditions pour que les forces appliquées à un corps solide libre, soient en équilibre.* — Ces forces étant réduites à une seule force et un couple, il est facile de voir qu'il ne peut y avoir équilibre que si cette force et le couple sont séparément nuls. En effet, si une force et un couple, qui ne seraient pas nuls, étaient en équilibre, on pourrait, sans détruire cet équilibre, fixer un point sur la direction de cette force, qui se trouverait ainsi détruite; il ne resterait donc plus que le couple, que l'on peut transporter de manière qu'une de ses deux forces passe par le point fixe, qui la détruira; et il restera une force qui ne passera pas par le point fixe, et, par conséquent, d'après un des premiers principes, déplacerait le corps. On arrive ainsi à ce théorème :

Théorème. — *Pour que des forces quelconques appliquées à un système rigide y soient en équilibre, il est nécessaire et suffisant que toutes ces forces, transportées parallèlement à elles-même en un même point, y soient en équilibre, et que les couples provenant de ce transport, y soient de leur côté.*

Chacun de ces équilibres s'exprime généralement par trois équations, il y en aura donc six pour exprimer l'équilibre d'un système rigide : nous nous occuperons bientôt de leur formation.

Corollaire I. — *Si un système de forces est en équilibre sur un corps solide libre, le système de ces mêmes forces changées de sens y sera de même.*

En effet, si l'on opère sur chacun de ces deux systèmes la réduction que nous venons d'indiquer, en prenant le même point pour y transporter les forces, on aura en ce point, pour chacun des systèmes, des forces égales et opposées qui donneront deux résultantes égales et opposées, et des couples qui auront respectivement les mêmes plans,

les mêmes moments, mais des sens contraires : les axes de ces couples seront donc respectivement égaux et directement opposés. Les axes des couples résultants seront donc de même grandeur et de sens directement contraire.

Cela posé, s'il y a équilibre dans l'un d'eux, la force résultante et le couple résultant seront nuls séparément ; ils le seront donc dans l'autre, qui sera par conséquent aussi en équilibre.

COROLLAIRE II. — *Si un groupe de forces* B *peut en remplacer un autre* A *sur un corps solide, réciproquement* A *pourra remplacer* B.

En effet, d'après l'hypothèse, B et — A se feraient équilibre sur le système (le signe — étant mis devant le groupe pour indiquer un groupe composé de forces directement opposées à celles de A, comme nous en avons déjà prévenu au n° 20), et par conséquent, d'après ce qui vient d'être établi, A et — B seraient en équilibre : donc A peut remplacer B.

COROLLAIRE III. — *Si, dans un système de forces en équilibre sur un corps solide, on peut supprimer un groupe de forces sans détruire l'équilibre, ce groupe appliqué seul y serait en équilibre.*

En effet, soient A et B les deux groupes qui composent le système donné, et supposons qu'on puisse supprimer B sans troubler l'équilibre, c'est-à-dire que A seul serait en équilibre, et par suite — A, d'après le Corollaire I. Or, — A étant en équilibre sur le système, on peut supprimer A du système AB sans troubler l'équilibre, par suite B appliqué seul serait en équilibre. Il en résulte que — B y serait aussi.

Et réciproquement, *si un groupe* M *appliqué seul* à un corps solide y est en équilibre, on pourra le supprimer dans tout système de forces en équilibre sur ce corps, dont il ferait partie. Car il suffit pour cela que — M soit en

équilibre, seul sur le système; ce qui est en effet, puisque M y est.

Corollaire IV. — *Si dans un système de forces en équilibre sur un corps solide, on peut introduire un groupe A sans rompre cet état, ce groupe appliqué seul y serait en équilibre.*

En effet, on peut commencer par introduire les deux groupes A et — A. Or, supprimer ensuite — A, c'est comme si l'on avait introduit A seul, ce qui, par hypothèse, ne détruit pas l'équilibre. La suppression de — A ne détruira donc pas l'équilibre existant; donc, d'après le troisième corollaire, ce groupe serait en équilibre s'il était appliqué seul sur le système. Le groupe contraire A y est donc aussi; ce qu'il fallait prouver.

Corollaire V. — *Si des forces sont en équilibre sur un système non rigide, et qu'on puisse introduire un groupe A sans rompre cet état, ce groupe serait en équilibre sur le même système rendu rigide.*

En effet, les premières forces en équilibre sur le système non rigide y seraient encore si l'on rendait ce système entièrement rigide; et le système non rigide étant en équilibre après l'introduction de A, il en serait encore de même de ce système rendu rigide. Or ce dernier état de choses est celui que l'on obtiendrait en introduisant A dans le système rigide auquel seraient appliquées les premières forces, et qui serait en équilibre; et cette introduction ne rompant pas l'équilibre, le groupe A, appliqué seul sur le système rendu rigide, y serait en équilibre: ce qu'il fallait prouver.

Corollaire VI. — *Si l'on peut supprimer un groupe A sur un système non rigide en équilibre, sans détruire cet état, le groupe A serait en équilibre, appliqué seul sur le système rendu rigide.*

En effet, la suppression de A équivaut à l'introduction de — A. Or, cette introduction ne troublant pas l'équilibre, par hypothèse, il suit du corollaire précédent que le groupe — A serait en équilibre s'il était appliqué seul sur le système rendu rigide. Il en serait donc de même de A : ce qu'il fallait démontrer.

CONDITION POUR QU'UN SYSTÈME DE FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE AIT UNE RÉSULTANTE.

55. Pour qu'un système de forces non en équilibre soit réductible à une force unique, il est nécessaire et suffisant qu'en introduisant une certaine force il y ait équilibre. Car, si le système proposé peut être remplacé par une force unique, il serait en équilibre si l'on introduisait une force égale et contraire ; et réciproquement si le système proposé est mis en équilibre par l'introduction d'une certaine force S, ce qui entraîne qu'il y ait équilibre entre le système contraire et — S, il s'ensuit que — S peut remplacer le premier système (n° 20), et, par conséquent, ce dernier a une résultante — S. Or nous avons vu que tout système de forces appliquées à un corps rigide, peut être réduit à une force et un couple; il est donc nécessaire et suffisant que cette force et celle que l'on introduira détruisent le couple. Or ces deux forces peuvent toujours se réduire à un couple et une force; et il faut que cette dernière force soit zéro; car, sans cela, il faudrait qu'elle fût en équilibre avec le couple résultant des deux autres, ce qui est impossible. Les deux forces doivent donc former simplement un couple; et ce couple doit détruire le couple résultant. Il doit donc être dans un plan parallèle à celui de ce dernier; et, par conséquent, la résultante des forces transportées en un même point doit être parallèle au plan du couple résultant, et ne pas être égale à zéro. Et réciproquement, s'il en est ainsi,

il existera évidemment une force qui formera avec la résultante un couple ayant son plan parallèle à celui du couple résultant, le même moment et le sens contraire, et les deux forces seront réductibles à une force unique. Ou obtient ainsi la proposition suivante :

Pour que des forces appliquées à un système rigide aient une résultante, il est nécessaire que ces forces, transportées en un même point, donnent une résultante parallèle au plan du couple résultant.

ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME QUELCONQUE DE FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE LIBRE.

56 Nous avons montré que, pour que des forces quelconques appliquées à un corps solide fussent en équilibre, il était nécessaire et suffisant que toutes ces forces, transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque lié au corps, donnassent une résultante nulle, et que le moment du couple résultant fût aussi nul. Il ne s'agit plus que d'exprimer ces conditions par des équations. Nous prendrons, pour plus de généralité, un système d'axes de coordonnées obliques.

Désignons les forces données par

$$P,\ P',\ P'',\ldots$$

et par

$$xyz,\quad x'y'z',\quad x''y''z'',\ldots$$

les coordonnées de leurs points d'application respectifs

$$M,\ M',\ M',\ldots$$

Nous choisirons l'origine des coordonnées pour le point ou les forces seront transportées parallèlement à elles-mêmes, en vue de réduire le système à trois forces suivant les axes en trois couples suivant les plans coordonnés.

Mais, pour calculer plus facilement les moments de ces trois couples, nous commencerons par décomposer chaque force, en son point même d'application, en trois forces parallèles aux axes, et ce sont ces composantes que nous transporterons à l'origine où elles se trouveront dirigées suivant les axes mêmes. Ces composantes seront les mêmes que si l'on avait transporté les forces P, P',... à l'origine, et qu'on les eût ensuite décomposées suivant les axes; mais il sera bien plus facile de calculer les moments et de reconnaître le sens des couples composants situés dans les plans des axes. Prenons l'une quelconque, P, des forces données, et désignons par X, Y, Z les trois composantes parallèles aux axes, et appliquées au même point M que la force P.

La composante Z sera remplacée par une force égale et de même sens, située dans l'axe AZ, et par un couple situé dans le plan ZAM, qui pourra être décomposé en deux couples situés dans les deux plans coordonnés qui se coupent suivant AZ. En agissant de même pour la composante Y, on aura deux couples situés dans les deux plans qui se coupent suivant AY; et enfin la composante X donnera deux couples situés dans les deux plans qui se coupent suivant l'axe AX; de sorte que chaque plan coordonné contiendra deux couples, dont il faut calculer le moment et reconnaître le sens. Les formules que nous allons obtenir seront générales, sous une forme unique, aux mêmes conditions que dans tout ce qui précède; c'est-à-dire en regardant les coordonnées x, y, z comme positives quand elles sont de même sens que les directions respectives AX, AY, AZ, les forces parallèles dans un même plan comme positives ou négatives, suivant qu'elles sont dirigées dans le sens des actes positifs ou en sens contraire; et les moments comme positifs ou négatifs dans un même plan coordonné, suivant qu'ils seront dans le sens direct ou rétrograde pour un ob-

servateur situé du même côté de ce plan que l'axe des coordonnées qui ne s'y trouve pas.

D'abord, les forces dirigées suivant les axes se réduiront à trois, ayant respectivement pour expressions les sommes algébriques

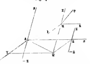
$$X + X' + X'' + \ldots,$$
$$Y + Y' + Y'' + \ldots,$$
$$Z + Z' + Z'' + \ldots,$$

ou

$$\sum X, \quad \sum Y, \quad \sum Z.$$

Soient maintenant Q le point où la composante Z en M perce le plan xy; AS, AT, l'x et l'y de M ou de Q (*fig.* 4);

Fig 4



le couple dont les deux forces Z sont appliquées en A et Q est celui qui proviendra de la composante Z sur A; et si en Z on introduit deux forces, Z, — Z, qui se détruisent, on aura, au lieu du premier couple, deux couples ayant Z pour forces, et l'un dans le plan zx, ayant pour bras de levier oblique AS ou x, l'autre ayant pour bras de levier oblique QS, et qu'on peut transporter dans le plan parallèle zy, où son bras de levier sera AT ou y. Et l'angle de la force et du bras de levier de chacun de ces couples est précisément celui des deux axes dans le plan desquels il se trouve.

On obtiendra semblablement les couples produits par les deux autres composantes.

En supposant d'abord les trois coordonnées x, y, z et les composantes X, Y, Z dirigées dans le sens des axes positifs, la force P, pour la somme des moments des deux couples, sera :

Dans le plan YZ,

$$(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y})\sin yz;$$

Dans le plan ZX,

$$(z\mathrm{X} - x\mathrm{Z})\sin zx;$$

Dans le plan XY,

$$(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})\sin xy.$$

Or on reconnaîtra, par une discussion très-simple, que, quelles que soient les directions des coordonnées et des composantes, les expressions précédentes représenteront toujours, en grandeur et en signes, les moments des couples fournis par la force P, à la condition que les coordonnées et les composantes seront regardées comme positives quand elles seront dirigées dans le sens des axes, et comme négatives dans le sens contraire; et que les moments positifs correspondront au sens direct des couples, et les moments négatifs au sens inverse. Et tout cela est démontré à la condition que les opérations sur toutes les quantités négatives seront exécutées suivant les règles démontrées dans le cas des polynômes. Il n'y a donc aucune question à faire à cet égard, cette manière d'opérer étant la condition de la généralité, qu'on peut ne pas vouloir, mais qu'on ne peut obtenir qu'à ce prix.

Maintenant, si l'on fait la somme algébrique de toutes les expressions analogues que fournissent les autres forces P', P'', ..., on aura, en grandeur et en signes, les moments des couples résultants dans les trois plans coordonnés. Et comme

des couples situés dans trois plans qui n'ont qu'un point commun, se composeraient toujours en un seul dont le moment ne serait pas nul, il est nécessaire, pour l'équilibre de l'ensemble des couples, que les trois moments résultant soient séparément nuls.

De plus, pour que la résultante des forces soit nulle, il faut que ses trois composantes suivant les axes, le soient séparément. Les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre des forces données, seront donc exprimées par les six équations suivantes, dans lesquelles nous avons supprimé les facteurs inutiles $\sin yz$, $\sin zx$, $\sin xy$:

$$(1) \qquad \sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum z = 0,$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum (yZ - zY) = 0, \\ &\sum (zX - xZ) = 0, \\ &\sum (xY - yX) = 0. \end{aligned} \right.$$

Si les axes sont rectangulaires, ces équations deviennent

$$(3) \qquad \sum P\cos\alpha = 0, \quad \sum P\cos\beta = 0, \quad \sum \cos\gamma = 0,$$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0, \\ &\sum P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0, \\ &\sum P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces trois dernières équations peuvent être énoncées d'une manière qu'il n'est pas inutile de reconnaître. Si, par le point quelconque d'application de la force P, on mène un plan perpendiculaire à AZ, qui coupe cette ligne en O, et qu'on décompose la force en une force parallèle à

cet axe et une autre Q, située dans le plan perpendiculaire, la première sera $P\cos\gamma$, et la seconde $P\sin\gamma$ sera la résultante des forces $P\cos\alpha$, $P\cos\mathcal{C}$, parallèles à AX, AY. Le moment de cette force Q par rapport à O, que l'on appelle aussi le *moment de la force P par rapport à AZ*, sera donc la somme algébrique des moments des deux autres, ou

$$P(x\cos\mathcal{C} - y\cos\alpha),$$

ce qui est le couple relatif à la force P, estimé suivant l'axe des z. D'où l'on voit que les trois dernières équations d'équilibre expriment que *les sommes des moments de toutes les forces par rapport à trois axes rectangulaires sont séparément égales à zéro.*

On peut remarquer que la distance du point O à la force Q n'est autre chose que la distance de O au plan mené par la force P parallèlement à l'axe des z; c'est donc la plus courte distance de la force P à cet axe. De sorte que le moment d'une force par rapport à un axe est le produit de la plus courte distance de ces deux droites par la composante de cette force perpendiculairement à l'axe.

CAS OU TOUTES LES FORCES SONT DANS UN MÊME PLAN.

57. Si, pour plus de simplicité, on prend ce plan pour celui des x et y, on aura, pour toutes les forces,

$$z = 0, \quad Z = 0,$$

les équations (1) et (2) se réduiront donc aux suivantes :

$$(5) \qquad \sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum (xY - yX) = 0,$$

ou, si les axes sont rectangulaires,

$$(6) \sum P\cos\alpha = 0, \quad \sum P\cos\mathcal{C} = 0, \quad \sum P(x\cos\mathcal{C} - y\cos\alpha) = 0.$$

Ce cas particulier peut être traité directement, en sui-

5

vant la même marche que dans le cas général : c'est même ce qu'il convient de faire pour les commençants. On arrive ainsi immédiatement aux équations (5) ou (6).

La troisième des équations (6), qui exprime que le couple résultant a un moment nul, peut être mise sous une autre forme qu'il n'est pas inutile de connaître. Il suffit, pour cela, de transporter les forces elles-mêmes à l'origine, sans les décomposer à leur point d'application : le couple qui proviendra du transport de l'une quelconque des forces aura pour moment le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de l'origine sur sa direction; le sens de ce couple sera direct si la force tend à faire tourner le système dans le sens direct autour de l'origine supposée fixe, et inverse dans le cas contraire. En désignant ce produit sous le nom de *moment de la force par rapport à l'origine*, et en le regardant comme positif, quand le sens est direct, et comme négatif, quand le sens est rétrograde, la condition d'équilibre des couples s'énoncera ainsi :

La somme algébrique des moments des forces par rapport à un point quelconque du plan, doit être égale à zéro.

CAS OU TOUTES LES FORCES SONT PARALLÈLES.

Dans ce cas, les rapports $\frac{X}{P}$, $\frac{Y}{P}$, $\frac{Z}{P}$ sont les mêmes pour toutes les forces. Si nous les désignons par a, b, c, les équations (1), (2) deviendront :

Les premières

$$a\sum P=0,\quad b\sum P=0,\quad c\sum P=0,$$

ou simplement

$$\sum P=0,$$

Les secondes

$$\sum P(cy - bz) = 0, \quad \sum P(az - cx) = 0, \quad \sum P(bx - ay) = 0,$$

ou

$$(7) \quad \begin{cases} c \sum Py = b \sum Pz, \\ a \sum Pz = c \sum Px, \\ b \sum Px = a \sum Py. \end{cases}$$

Il faut maintenant distinguer deux cas, suivant que l'on voudra que l'équilibre ait lieu, quelle que soit la direction des forces passant toujours par les mêmes points d'application, ou bien que la direction de ces forces soit donnée et invariable.

1° Dans le premier cas, deux des rapports a, b, c sont indéterminés, a et b, par exemple. La troisième des équations (7) exige alors qu'on ait $\sum Px = 0$, $\sum Py = 0$, et les deux autres donneront alors $\sum Pz = 0$. Les conditions d'équilibre, dans cette hypothèse, seront donc, comme nous les avons déjà trouvées,

$$\sum P = 0, \quad \sum Px = 0, \quad \sum Py = 0, \quad \sum Pz = 0.$$

2° Si l'équilibre doit avoir lieu pour une direction déterminée des forces, a, b, c sont des nombres donnés invariables. Les deux premières équations (7) donnent

$$\sum Px = \frac{a}{c} \sum Pz, \quad \sum Py = \frac{b}{c} \sum Pz,$$

et la troisième en est une conséquence. Les conditions de

l'équilibre se réduisent donc, dans ce cas, à

$$(8)\quad \sum P = 0,\quad \sum Px = \frac{a}{c}\sum Pz,\quad \sum Py = \frac{b}{c}\sum Pz,$$

si l'on prenait l'axe des z parallèle aux forces, on aurait

$$a = 0,\quad b = 0,$$

et les équations deviendraient

$$\sum P = 0,\quad \sum Px = 0,\quad \sum Py = 0,$$

comme nous les avions trouvées précédemment.

3° Si ces forces parallèles étaient dans un même plan ayant pour équation

$$z = \alpha x + 6y + \gamma,$$

on aurait

$$c = \alpha a + 6b,$$

et les équations (8) deviendraient

$$\sum P = 0,\quad \left(1 - \frac{a\alpha}{c}\right)\sum Px = \frac{6a}{c}\sum Py,$$

$$\left(1 - \frac{6b}{c}\right)\sum Py = \frac{b\alpha}{c}\sum Px,$$

$$b\sum Px = a\sum Py,\quad a\sum Py = b\sum Px,$$

qui se réduisent à une seule.

Les équations d'équilibre seront alors, comme nous les avons trouvées précédemment,

$$\sum P = 0,\quad \sum Px = \frac{a}{b}\sum Py.$$

CALCUL DE LA RÉSULTANTE DE FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE.

58. Soient X', Y', Z', X'', Y'', Z'' les composantes des forces données. Posons

$$\sum X' = X,\quad \sum Y' = Y,\quad \sum Z' = Z,$$

X, Y, Z seront les composantes de la résultante des forces données, transportées à l'origine.

Soient $-X_1$, $-Y_1$, $-Z_1$, en grandeur et en signe, les composantes d'une force inconnue qui ferait équilibre aux forces donnés, et par suite X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la résultante si elle existe, et soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son point d'application: les six équations de l'equilibre seront

$$X - X_1 = 0, \quad Y - Y_1 = 0, \quad Z - Z_1 = 0,$$

$$\sum(y'Z' - z'Y') - (y_1 Z_1 - z_1 Y_1) = 0,$$

$$\sum(z'X' - x'Z') - (z_1 X_1 - x_1 Z_1) = 0,$$

$$\sum(x'Y' - y'X') - (x_1 Y_1 - y_1 X_1) = 0.$$

Représentant par L, M, N les trois sommes qui sont dans ces équations, elles deviennent

(1) $\quad X_1 - X = 0, \quad Y_1 - Y = 0, \quad Z_1 - Z = 0,$

(2) $\quad y_1 Z - z_1 Y = L, \quad z_1 X - x_1 Z = M, \quad x_1 Y - y_1 X = N.$

Pour qu'il y ait équilibre, il est nécessaire et suffisant que l'on puisse satisfaire à ces six équations par des valeurs données à x_1, y_1, z_1, X_1, Y_1, Z_1, et alors il y aura une résultante qui sera la force opposée à celle qui établira l'équilibre.

Les équations (1) donnent

$$X_1 = X, \quad Y_1 = Y, \quad Z_1 = Z,$$

ce qui exprime que les composantes de la résultante suivant les axes seront les sommes des composantes des forces données.

Les équations (2) expriment que les moments des trois couples fournis par la résultante, sont égaux à la somme de

ceux que fournissent toutes les forces. Elles feront connaître x_1, y_1, z_1, mais elles ne seront pas toujours compatibles. En effet, si l'on multiplie la première par X, la seconde par Y, la troisième par Z, et qu'on les ajoute, on aura

$$(3) \qquad LX + MY + NZ = 0,$$

équation entre des quantités connues, et qui est une condition nécessaire pour la possibilité de l'équilibre. Elle serait insignifiante si les trois quantités X, Y, Z étaient nulles; mais alors on ne multiplierait pas les équations (2) par o, et elles se réduiraient à $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, qui indiqueraient que le couple résultant serait nul; et le système serait en équilibre.

Écartant donc ce cas, l'équation (3) subsiste comme conséquence des équations (2), qui se réduisent à deux seulement.

Les quantités x_1, y_1, z_1 ne seront donc pas déterminées, et comme elles satisfont à deux équations du premier degré, le lieu des points qu'elles construisent sera une ligne droite. Tous les points de cette droite pourront donc être pris pour le point d'application de la force qui fait équilibre, et par suite de la résultante du système, qui lui est directement opposée.

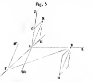
Remarque. — Comme on a démontré que la condition pour que les forces aient une résultante, est que la résultante des forces transportées en un même point soit parallèle au plan du couple résultant, il s'ensuit que l'équation (3) doit exprimer cette condition géométrique. C'est ce qu'on vérifie immédiatement dans le cas des axes rectangulaires. Car alors X, Y, Z sont proportionnels aux cosinus des angles que la résultante fait avec les axes, et L, M, N le sont aux cosinus des angles que fait l'axe du couple résultant. L'équation (3) exprime donc que la résultante est perpendiculaire à l'axe du couple résultant, et par con-

séquent parallèle à son plan. Dans le cas des axes obliques, il n'est pas facile de reconnaître cette signification de l'équation (3), et je ne connais aucun Traité de Mécanique où elle soit démontrée. Il est nécessaire pour cela de connaître l'équation du plan du couple résultant de trois autres, situés dans trois plans donnés que l'on prendra pour plans coordonnés. Cette équation ne se trouvant dans aucun ouvrage, à ma connaissance du moins, je crois utile de la donner et de la démontrer ici.

ÉQUATION DU PLAN DU COUPLE RÉSULTANT DE TROIS COUPLES SITUÉS DANS LES PLANS COORDONNÉS.

59. Soient A, B, C (*fig.* 5) les moments des couples situés respectivement dans les plans YZ, ZX, XY. Composons d'abord les deux couples dont les plans se coupent

Fig. 5



suivant AX, pour cela, plaçons-les de manière qu'une des forces de l'un soit dans l'axe des z, et une des forces de l'autre dans l'axe des y, et en changeant la grandeur des forces sans changer les moments, faisons en sorte que les secondes forces de ces couples viennent rencontrer l'axe AX en un même point B pris à volonté.

Supposons, pour fixer les idées, que les trois couples soient dans le sens direct, et soient AC, AD les grandeurs des forces qu'il faudra appliquer au bras de levier oblique AB pour que les moments soient B et A; ces forces seront déterminées par les conditions suivantes :

$$(1)\qquad AC.AB\sin xz = B,$$

$$(2)\qquad AD\ AB\sin xy = C,$$

dans lesquelles AB peut être choisi à volonté.

La diagonale AM du parallélogramme CADM sera la force qu'il faudra appliquer au bras de levier AB pour avoir le couple résultant des deux premiers. L'inclinaison de cette force sur AB n'est pas donnée, et par suite le moment du couple MABM′ n'est pas donné; mais nous verrons qu'il est inutile de le calculer.

Il reste à composer ce couple avec le couple situé dans le plan YZ, et dont le moment est A. Nous transformerons ce dernier, et nous le placerons de manière que ses forces soient égales à AM, et que l'une des deux soit directement opposée à AM, ce qui est possible, puisque AM est dans le plan YZ, qui est celui du couple, la seconde force M″E de ce couple ME″AM₁, viendra rencontrer AY en un point E, tel que l'on ait

$$AM.AE\sin MAD = A;$$

et comme

$$MA : AC :: \sin YZ : \sin MAD,$$

d'où

$$MA\sin MAD = AC\sin yz,$$

on aura

$$(3)\qquad AE.AC\sin yz = A, \ldots$$

La force AM étant détruite par AM_1, il restera seulement les deux forces M″E et BM′, qui formeront le couple résultant.

Le plan cherché est donc celui qui passerait par EB et serait parallèle à AM, ou, encore, tout autre plan parallèle, par exemple celui qui passerait par AM et serait parallèle à EB

Les équations de AM sont

$$x = 0, \quad y = -\frac{AD}{AC} z,$$

ou, d'après les équations (1) et (2),

$$(4) \qquad y = -\frac{C \sin xz}{B \sin xy} z, \ldots;$$

celles de EB sont

$$z = 0, \quad \frac{x}{AB} + \frac{y}{AE} = 1,$$

et celles de la parallèle menée par l'origine, et qui sera dans le plan cherché, seront

$$z = 0, \quad \frac{x}{AB} + \frac{y}{AE} = 0,$$

ou

$$x = -\frac{AB}{AE} y,$$

et comme les équations (1) et (3) donnent

$$AE = \frac{A \sin xz}{B \sin yz} AB,$$

les équations précédentes deviennent donc

$$(5) \qquad z = 0, \quad x = -\frac{B \sin yz}{A \sin xz} y.$$

Maintenant que les équations des deux droites qui déterminent le plan sont exprimées au moyen des quantités données, rien n'est plus facile que de trouver cette équation. Soit, en effet, l'équation générale d'un plan passant par l'origine, $ax + by + cz = 0$.

La condition, pour qu'il contienne la droite (4), sera

$$\frac{c}{b} = \frac{C \sin xz}{B \sin xy},$$

et, pour qu'il contienne la droite (5),

$$\frac{a}{b} = \frac{A \sin xz}{B \sin yx}.$$

Reportant les valeurs de a et c, et supprimant le facteur b, on a, pour l'équation du plan du couple résultant,

$$\frac{A}{\sin yz}x + \frac{B}{\sin xz}y + \frac{C}{\sin xy}z = 0.$$

APPLICATION DE CETTE ÉQUATION A LA RÉSULTANTE D'UN SYSTÈME.

60. Ce système est réduit à une force dont les composantes suivant les axes sont X, Y, Z, et à un couple résultant des trois autres situés dans les plans coordonnés et dont les moments obliques sont L, M, N, et dont, par conséquent, les moments rectangulaires sont $L \sin yz$, $M \sin xz$, $N \sin xy$. Ces dernières expressions sont donc celles que, dans le calcul précédent, nous avons désignées par A, B, C. L'équation du plan du couple résultant sera donc, dans le cas actuel,

$$Lx + My + Nz = 0.$$

Or les équations de la résultante des forces X, Y, Z, situées dans les axes, sont

$$x = \frac{X}{Z}z, \quad y = \frac{Y}{Z}z,$$

et la condition pour que cette droite soit parallèle au plan sera

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Cette équation que nous avons trouvée pour exprimer que les équations de la résultante ne sont pas incompatibles, et qui était, par conséquent, la condition de l'existence de cette résultante, exprimait donc que la résultante des forces transportées en un même point était parallèle au plan du couple résultant.

Cette dernière condition avait été démontrée par d'autres considérations, mais il n'était pas inutile de montrer que celle à laquelle le calcul conduisait n'en était que la traduction.

COMPARAISON DES MOMENTS D'UN SYSTÈME DE FORCES PAR RAPPORT A DIFFÉRENTES DROITES.

61. Rappelons d'abord ce que nous avons appelé *moment d'une force par rapport à une droite*. Nous avons conçu cette force décomposée en deux autres, l'une parallèle à la droite ou axe, l'autre dans un plan perpendiculaire à cet axe, et nous avons nommé *moment de la force donnée par rapport à cet axe*, le moment de cette dernière composante par rapport au point O, où l'axe est coupé par ce plan perpendiculaire.

Or ce moment n'est autre chose que celui du couple auquel cette dernière composante donne lieu, quand on la transporte en un point quelconque de la droite donnée. Et comme la composante parallèle à l'axe, transportée en ce même point O, donne lieu à un couple dont le plan passe par l'axe et est, par conséquent, perpendiculaire au plan de l'autre couple; que d'ailleurs les deux couples sont les composants du couple résultant du transport de la force en O, on peut dire que le moment d'une force par rapport à une droite quelconque n'est autre chose que le moment du couple résultant correspondant au point quelconque O, estimé suivant la direction de cette droite, ou, en d'autres

termes, la projection de l'axe du couple résultant sur cette même droite. On peut donc dire que,

Le moment d'une force par rapport à une droite quelconque, est égal à l'axe du couple résultant du transport de cette force en un point quelconque de cette droite, projeté sur la direction de cette dernière.

62. Si l'on avait plusieurs forces et qu'on fît pour chacune une décomposition analogue, en prenant le même point O pour toutes, la somme des moments de ces forces, par rapport à l'axe donné, serait la somme des moments des couples provenant du transport de chaque force en O, estimés suivant cette droite; ce serait donc la projection de l'axe du couple résultant sur la direction de cette droite; ce que nous exprimerons ainsi :

Le moment d'un système de forces par rapport à une droite quelconque, s'obtient en projetant sur cette direction l'axe du couple résultant du transport des forces en n'importe quel point de cette droite.

Ce qui montre que cette projection sera constante, quoique l'axe du couple résultant puisse changer, en déplaçant sur la droite le point où l'on transporte les forces. Nous parviendrons tout à l'heure à cette même propriété par des considérations différentes.

MOMENTS PAR RAPPORT AUX DROITES QUI PASSENT PAR UN MÊME POINT.

63. Le transport de toutes les forces en ce point donne lieu à un couple résultant, et son axe projeté sur une droite quelconque passant par ce point, donnant la mesure du moment du système des forces données par rapport à cette droite, il en résulte immédiatement les conséquences suivantes :

La droite, menée suivant l'axe du couple résultant,

donne le moment maximum. Toutes les droites qui font le même angle avec l'axe de ce couple donnent des moments égaux. Toutes les droites situées dans le plan perpendiculaire à cet axe donnent des moments nuls.

Ces propositions sont si évidentes qu'on croirait presque inutile de les énoncer. Mais, avant la théorie des couples, elles constituaient des théorèmes importants, dont la démonstration ne se présentait pas d'elle-même.

CHANGEMENT QUE SUBIT LE MOMENT MAXIMUM PAR LE DÉPLACEMENT DU POINT.*

Si l'on déplace de A en A' le point où les forces avaient été transportées, le couple résultant produit en A' deux forces égales et opposées qui se détruiront, et la résultante se transportera en A', en produisant un nouveau couple dont le plan passera par la résultante en A et le point A', et dont le moment sera le produit de cette résultante par la perpendiculaire abaissée sur elle du point A'. L'axe de ce couple sera perpendiculaire à la résultante et à la droite AA'. De là résultent immédiatement les propositions suivantes :

Si le point A se déplace sur la résultante en A, le couple introduit sera nul, et l'axe du couple résultant ne changera ni de direction, ni de grandeur.

S'il se déplace le long d'une autre droite quelconque, l'axe du couple introduit étant perpendiculaire à AA', qui est situé sur cette droite, donnera sur elle une projection nulle, et l'axe du couple résultant, quoique changeant de grandeur et de direction, donnera la même projection sur la droite ; et, par conséquent, *le moment du système par rapport à une droite quelconque ne sera pas changé par le déplacement de A sur cette droite.* C'est ce que nous avions déjà reconnu par d'autres considérations. Supposons main-

tenant que le point A' prenne des positions quelconques, non sur la résultante en A. Soient AR (*fig* 6) la direction

Fig 6.



de cette résultante, AM celle de l'axe du couple resultant, et θ l'angle de ces deux droites. Le couple qu'il faudra composer avec AM, aura son axe perpendiculaire à AR, et pourra prendre toutes les directions dans le plan perpendiculaire à AR; aucune ne sera celle de AM si l'angle θ n'est pas droit, c'est-à-dire si le système des forces n'a pas une résultante unique : ainsi, en exceptant ce cas particulier, la direction de l'axe du couple résultant sera différente de AM, si A' n'est pas sur AR. Les directions diverses de l'axe du couple RR' feront avec AM, les unes un angle aigu, les autres un angle obtus, si AM et AR n'ont pas la même direction. Les axes qui feront un angle aigu avec AM, donneront un couple résultant plus grand que AM; ceux qui feront un angle obtus pourront donner un couple résultant plus grand ou plus petit que AM, suivant la grandeur du moment du couple RR, qui peut varier de zéro à l'infini, en changeant la distance de A' à AR. D'où l'on voit que le moment maximum relatif au point A, comparé à ceux qui correspondent aux divers axes passant par A', sera plus petit que les uns et plus grand que les autres, si les directions AM, AR sont différentes, mais si elles se confondent, les deux couples à composer auront nécessairement leurs

axes perpendiculaires entre eux, et, par conséquent, donneront un couple résultant plus grand que AM. D'où résulte cette proposition :

Le point pour lequel le moment du couple résultant est le plus petit, est celui pour lequel la direction de l'axe de ce couple se confond avec celle de la résultante.

Et, d'après ce qui vient d'être établi tout à l'heure, si l'on trouve un point jouissant de cette propriété, tous les points de la parallèle à la résultante menée par ce point, en jouiront de même; et tous les axes des couples résultants, ou, en d'autres termes, les axes pour lesquels la somme des moments des forces est maximum, considérés pour tous les points de cette droite, se confondent, puisqu'ils sont parallèles à cette droite même; de sorte qu'il n'existe dans l'espace qu'un seul axe tel, que la somme des moments des forces par rapport à lui, soit plus grande que par rapport à toute autre droite menée par un de ses points, et en même temps soit moindre que la somme maximum relative à tout point situé en dehors de lui. C'est à cet axe que M. Poinsot donne le nom d'*axe central des moments*.

64. *Détermination de l'axe central.* — Pour obtenir l'axe central, il faut choisir le point A', de telle sorte que la perpendiculaire au plan RAA', ou l'axe du couple RR', soit dans le plan MAR, et par conséquent dirigée suivant la ligne AN, intersection du plan MAR avec le plan mené par A perpendiculairement à AR, et telle, que AR soit dans l'angle MAN; il faudra donc prendre A' sur la droite menée par A dans ce dernier plan, perpendiculairement à AN, et du côté de AR pour lequel le sens du couple donnera à l'axe la direction AN, et non la direction opposée, puisqu'il faut que AR soit dans l'angle des directions des deux axes composants. Cela posé, il suffira de prendre le point A' à

une distance de AR telle, que le moment du couple soit égal au côté MB du parallélogramme MBAN.

Désignons par G le moment du premier couple résultant AM; par K celui du nouveau couple résultant; par p la distance de A' à AR; par θ l'angle MAR; le moment du couple RR' sera Rp. Les cosinus des angles de AR et AM avec les axes étant proportionnels respectivement à X, Y, Z et L, M, N, on aura d'abord

$$\cos\theta = \frac{LX + MY + NZ}{GR},$$

ensuite

$$K = G\cos\theta = \frac{LX + MY + NZ}{R}, \quad Rp = G\sin\theta.$$

Le point A' est ainsi déterminé autant qu'il doit l'être, ce sera l'un quelconque de ceux de la parallèle à AR menée à la distance $\frac{G\sin\theta}{R}$ de AR, sur la droite perpendiculaire à AN, et du côté de AR que nous avons indiqué. Les coordonnées a, b, c de ce point se détermineront par les équations suivantes, en prenant le point A pour origine :

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{G^2\sin^2\theta}{R^2},$$

$$aX + bY + cZ = 0, \quad aL + bM + cN = 0.$$

Les deux dernières expriment que la droite AA' est perpendiculaire sur la résultante, dont les composantes sont X, Y, Z, et sur l'axe du couple résultant, dont les axes composants sont L, M, N. La première exprime que la longueur AA' est égale à p. Ces trois équations donnent deux points dont les coordonnées sont égales et de signes contraires; mais un seul devra être choisi : c'est celui qui donne au couple RR' le sens que nous avons indiqué précédemment.

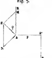
Le point A' étant ainsi déterminé, la parallèle à la re-

sultante menée par ce point sera *l'axe central*, et, nous le répétons, la direction de cet axe est, pour un quelconque de ses points, celle de l'axe du moment maximum; et ce moment est moindre que le maximum correspondant à tout autre point.

65. *Disposition de tous les axes autour de l'axe central.* — Concevons un plan quelconque perpendiculaire à l'axe central; ce que nous dirons de tous les points de ce plan s'appliquerait identiquement à ceux de tout autre plan parallèle.

Soient AR (*fig.* 7) cet axe, et A' un point quelconque

Fig. 7.



du plan perpendiculaire mené par A. En prenant ce nouveau point pour origine, il faudra composer le couple résultant dont l'axe est AM en direction et en grandeur, avec le couple situé dans le plan RAA', ayant pour moment Rp, p désignant la longueur AA'. L'axe du couple résultant sera, en direction et en grandeur, la diagonale AR du rectangle construit sur AM et la ligne AN, égale à Rp et perpendiculaire au plan RAA'. Désignons par φ l'angle de l'axe résultant avec l'axe central, et par K le moment résultant; on aura

$$\tang\varphi = \frac{Rp}{G}, \quad K^2 = R^2p^2 + G^2.$$

Les valeurs de K et φ ne dépendant que de p, il s'ensuit

que, pour tous les points d'une même circonférence décrite du centre A dans le plan perpendiculaire à AR, les moments maxima sont égaux, et leurs axes forment un hyperboloïde de révolution autour de l'axe central, dont la circonférence que l'on considère forme le cercle de gorge; et le demi-axe imaginaire de l'hyperbole génératrice a pour valeur $\frac{G}{R}$. Si l'on prend p comme abscisse et le moment correspondant K comme ordonnée, on construira, d'après l'équation ci-dessus, une hyperbole dont l'axe réel sera dirigé suivant AR et aura pour valeur 2G. Son demi-axe imaginaire sera $\frac{G}{R}$ comme pour l'autre hyperbole.

Ainsi, l'axe central jouit de la propriété, que, pour tous les points d'une surface cylindrique quelconque dont il est l'axe, le moment maximum a la même valeur; l'axe de ce moment a la même direction pour tous les points d'une même arête de ce cylindre; il change de direction en passant d'une arête à une autre, en conservant la même inclinaison sur l'axe et la même distance. La valeur du moment maximum augmente indéfiniment avec la distance de l'origine à l'axe central; et l'angle de son axe avec l'axe central a pour limite l'angle droit.

66. *Cas où le système des forces a une résultante.* — Si l'on prend pour origine un point quelconque de cette résultante, le couple correspondant sera nul, et, par conséquent, cette droite sera l'axe central lui-même. Les formules précédentes donnent, en effet, $p = 0$, quand on suppose $G = 0$. Si maintenant on prend une origine quelconque en dehors de la résultante unique, on aura un couple résultant dont le plan sera celui qui passera par l'axe central et la nouvelle origine. Ainsi, dans ce cas particulier, *tous les points d'un même plan quelconque passant par la résul-*

tante unique, donnent des couples résultants dont les axes sont parallèles.

Mais les moments de ces couples ne sont pas égaux; ils sont proportionnels à la distance de l'origine qui leur correspond à la résultante générale. Ils n'ont donc la même valeur que pour les points situés sur deux parallèles à la résultante, équidistantes de cette ligne; et, de plus, le sens de ces couples n'est le même que pour les points d'une même parallèle.

Cas où la résultante est nulle. — Si la résultante est nulle, le changement d'origine n'introduit aucun nouveau couple, et, par conséquent, le couple résultant a toujours le même moment, et son plan la même direction, qu'elle que soit l'origine où l'on transporte les forces.

CHAPITRE V.

ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME RIGIDE QUI N'EST PAS ENTIÈREMENT LIBRE

67. *Cas d'un seul point.* — Considérons d'abord le cas où le système se réduit à un seul point, et supposons-le assujetti à rester sur une surface ou une courbe fixe.

Si un point situé sur une surface qu'il ne peut quitter, est sollicité par une force normale à cette surface, il restera en équilibre; car toutes les directions suivant lesquelles il pourrait se mouvoir étant semblablement placées par rapport à la force, on ne voit aucune raison pour qu'il prenne l'une plutôt que l'autre, et l'on peut admettre qu'il n'en prendra aucune : cette supposition est confirmée par toutes les expériences. Mais si le point est sollicité par une force oblique, on peut la décomposer en deux autres, dont l'une soit normale et l'autre dans le plan tangent; la première est détruite par la résistance de la surface; mais rien ne s'oppose à ce que la seconde déplace le point, si l'on suppose qu'il puisse se déplacer librement sur la surface dans toutes les directions. C'est ce qui n'aurait pas nécessairement lieu s'il y avait ce que l'on appelle un *frottement*, mais nous en faisons abstraction pour le moment, et nous supposons tous les déplacements entièrement libres sur la surface.

Une surface, ne pouvant donc détruire que les forces qui lui sont normales, produit toujours le même effet qu'une force égale à la somme de celles qu'elle détruit et agissant dans la direction normale opposée. Il en est

de même de la résistance d'une courbe sur laquelle un point peut se déplacer librement. Elle détruit les forces dont la direction est comprise dans le plan normal mené au point d'application, et n'en détruit aucune autre. Sa résistance pourrait donc toujours être remplacée par une force normale, égale et contraire à la résultante de celles qu'elle détruit.

Cela posé, soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface sur laquelle doit rester un point sollicité par des forces quelconques P, P′,...; il n'est plus nécessaire, pour son équilibre, que ces forces se détruisent; il suffit que leur résultante soit normale à la surface, et, par conséquent, que les cosinus des angles formés avec les axes par la direction de la résultante soient proportionnels à ceux qui se rapportent à la normale. Or les premiers sont entre eux comme les quantités désignées précédemment par X, Y, Z. Les autres peuvent s'exprimer en fonction de x, y, z au moyen de l'équation de la surface; désignons-les par $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$.

Les conditions d'équilibre sont donc exprimées par les équations

$$\frac{X}{\cos a} = \frac{Y}{\cos b} = \frac{Z}{\cos c}.$$

Si ces équations n'étaient pas satisfaites, il n'y aurait pas équilibre; et si l'on voulait savoir en quel point de la surface les forces proposées seraient détruites, il faudrait trouver les valeurs de x, y, z qui satisferaient à ces deux équations et à celle de la surface.

Si la surface ne résistait que dans un sens, il faudrait s'assurer si la résultante des forces agit dans le sens contraire, sans quoi elle ne serait pas détruite. Ce cas est celui d'un point qui ne serait que posé sur une surface qu'il ne pourrait pénétrer, mais dont il pourrait être détaché.

Si le point était assujetti à rester sur une courbe donnée, il faudrait, pour qu'il fût en équilibre, que la résultante fût perpendiculaire à la tangente. Or cette dernière ligne fait, avec les axes, des angles a, b, c dont les cosinus sont déterminés en fonction de x, y, z par les équations de la courbe. La condition d'équilibre sera donc exprimée par l'équation

$$X \cos a + Y \cos b + Z \cos c = 0.$$

Si cette équation n'était pas satisfaite pour le point donné, il n'y aurait pas équilibre. On déterminerait le point de la courbe où les forces données seraient détruites, en cherchant les valeurs de x, y, z qui satisferaient à cette équation et aux deux équations de la courbe.

AUTRE MANIÈRE D'AVOIR ÉGARD A LA RÉSISTANCE DES SURFACES OU DES LIGNES.

68. La résistance d'une surface ou d'une courbe produisant toujours une force normale, on pourrait substituer cette dernière à la surface ou à la courbe, et considérer alors le point comme entièrement libre. La grandeur de cette force sera une des inconnues de la question ; sa direction sera dans l'un ou l'autre sens de la normale s'il s'agit d'une surface, et ne sera assujettie qu'à être perpendiculaire à la tangente s'il s'agit d'une courbe.

Considérons d'abord le cas d'une surface dont l'équation soit $F(x, y, z) = 0$, soient N l'intensité de la force normale qui la remplace, et a, b, c les angles qu'un des deux sens de la normale fait avec les axes, les composantes de N seront

$$\pm N \cos a, \quad \pm N \cos b, \quad \pm N \cos c,$$

les signes supérieurs correspondant à l'un des sens de la normale, et les signes inférieurs à l'autre. Maintenant,

le point devant être considéré comme libre, les deux forces qui le sollicitent doivent être égales et opposées, ainsi que leurs composantes respectives ; les équations d'équilibre seront donc

$$X \pm N\cos a = 0,\quad Y \pm N\cos b = 0,\quad Z \pm N\cos c = 0,$$

d'où, en éliminant N,

$$\frac{X}{\cos a} = \frac{Y}{\cos b} = \frac{Z}{\cos c}.$$

Ces deux équations sont nécessaires et suffisantes pour l'équilibre, parce qu'elles en remplacent deux des précédentes, et que la troisième sera toujours satisfaite en prenant une valeur convenable de N et un signe convenable pour le second terme.

Mais on calculera plus facilement N en observant que, puisqu'elle est égale et opposée à la force donnée, sa valeur sera

$$N = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Considérons maintenant un point assujetti à rester sur une courbe dont les équations soient

$$F(x, y, z) = 0,\quad f(x, y, z) = 0.$$

La force N, qui remplace la résistance de la courbe, peut avoir une direction normale arbitraire. Les angles a, b, c que la tangente à la courbe fait avec les axes sont des fonctions de x, y, z données par les deux équations précédentes. Si l'on désigne par α, 6, γ les angles que fait avec les axes la direction de la force N, on aura

$$\cos a \cos\alpha + \cos b \cos 6 + \cos c \cos\gamma = 0,$$

et les équations de l'équilibre seront

$$X + N\cos\alpha = 0,\quad Y + N\cos 6 = 0,\quad Z + N\cos\gamma = 0.$$

On éliminera les inconnues α, 6, γ, N en multipliant

ces équations, respectivement par $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, et les ajoutant; on trouve ainsi, en vertu de la précedente,

$$X\cos a + Y\cos b + Z\cos c = 0,$$

équation nécessaire et suffisante pour que les quatre équations puissent avoir lieu en même temps. Les trois précédentes détermineront la grandeur et le signe des composantes $N\cos\alpha$, $N\cos\mathcal{G}$, $N\cos\gamma$, qui sont égales et de signes contraires à X, Y, Z, et donneront, pour la résistance de la courbe, une force égale et opposée à la résultante des forces données, comme cela devait être évidemment.

69. *Système rigide quelconque dont un point est fixe.* — Si l'on prend le point fixe pour origine, les trois forces dirigées suivant les axes seront détruites par la résistance de ce point. Or, *des couples appliqués à un système qui renferme un point fixe doivent se faire équilibre comme si la corps était entièrement libre;* car, s'ils donnaient un couple résultant différent de zéro, on pourrait le transporter de manière qu'une de ses forces passât par le point fixe, qui la détruirait; il resterait donc une force qui ne passerait pas par le point fixe, et déplacerait ce systeme. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système seront donc

$$\sum(yZ - zY) = 0,\quad \sum(zX - xZ) = 0,\quad \sum(xY - yX) = 0.$$

Les couples, se détruisant indépendamment du point fixe, n'exercent aucun effort sur lui, et ne tendent qu'à rompre le système. Le point fixe n'est donc sollicité que par la résultante des forces $\sum X$, $\sum Y$, $\sum Z$; cette résultante est égale et opposée à la force que développe ce point pour établir l'équilibre.

Un corps qui peut tourner librement autour d'un point

fixe constitue la machine que l'on nomme *levier*, le point fixe se nomme *point d'appui*. On voit donc que l'équilibre du levier exige que les couples qui naissent du transport de toutes les forces parallèlement à elles-mêmes au point d'appui, se détruisent d'eux-mêmes. S'il n'y a que deux forces, il faut alors qu'elles soient dans un même plan avec le point d'appui, et que les deux couples qu'elles produisent soient de sens contraires et aient des moments égaux. Ces moments sont aussi les moments des forces par rapport au point d'appui.

La résultante des forces transportées au point d'appui, constituant tout ce qui n'est pas détruit par la rigidité seule du corps, ne l'est que par le point d'appui, et forme ce que l'on appelle la *charge* de ce point.

Si le levier n'était que posé sur une surface solide sur laquelle il pourrait glisser librement, le point d'appui pourrait glisser de même, et il faudrait pour l'équilibre que cette résultante fût normale à la surface fixe.

70. *Cas d'un axe fixe.* — Si deux points du système sont fixes, tous les points situés sur la droite qui les renferme sont invariables de position, et le corps est dans le même cas que s'il était assujetti à tourner autour d'un axe fixe, dont les points seraient susceptibles d'offrir en tous sens une résistance indéfinie. Si l'on prend cette droite pour axe des z, les trois forces dirigées suivant les axes seront détruites, ainsi que les couples qui sont situés dans les deux plans qui passent par l'axe des z, et dont les bras de levier pourraient être transportés sur cet axe même. Il ne reste donc plus que le couple résultant situé dans le plan xy, et qui ne saurait être détruit par l'axe fixe. La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre est donc, dans ce cas,

$$\sum (x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}) = 0.$$

71. Pour connaître les efforts exercés sur l'axe fixe, il faut composer les forces qu'il détruit. Les couples situés dans le plan ZX et la force $\sum X$ se réduisent à une force qui rencontre l'axe, à moins que l'on n'ait $\sum X = 0$, auquel cas on aurait un couple seulement : il en est de même dans le plan ZY. Outre ces efforts appliqués à l'axe, il y a encore la force $\sum Z$, qui tend à l'entraîner dans le sens où elle est dirigée. L'axe produit donc des forces égales et contraires à celles-ci, puisqu'il les tient en équilibre.

Si deux points seulement du système sont fixes, les résistances ne peuvent provenir que des deux points, et l'on devra décomposer les forces qui rencontrent l'axe, en d'autres qui passent par ces points, et feront connaître les forces qu'ils produisent pour détruire celles-ci. Quant à la force dirigée suivant la droite qui les joint, elle peut être décomposée d'une infinité de manières en deux autres appliquées à ces points, et il en serait de même s'il y avait un plus grand nombre de points fixes sur la même droite.

72. On pourrait supposer que le corps eût la liberté de glisser le long de l'axe fixe, et en même temps de tourner autour de lui. Dans ce cas, l'axe détruirait toutes les forces dont la direction lui serait perpendiculaire, et n'en pourrait détruire aucune autre. Il faudrait donc décomposer chaque force qui rencontre l'axe en deux autres, l'une suivant l'axe, l'autre perpendiculaire. Mais alors il est plus simple de prendre des axes rectangulaires, et les conditions d'équilibre seront exprimées par les deux équations

$$\sum P\cos\gamma = 0, \quad \sum P(x\cos 6 - y\cos\alpha) = 0.$$

On connaîtra la résistance de l'axe, en composant les cou-

ples situés dans les plans ZX_1 ZY, et les forces dirigées suivant les axes des x et des y.

Si le corps ne pouvait que glisser sans tourner, l'équation $\sum P\cos\gamma = 0$ serait suffisante et nécessaire, et le couple situé dans le plan xy ferait connaître la résistance opposée par l'axe à la torsion.

La machine que l'on nomme *tour* ou *treuil* n'est autre chose qu'un corps solide qui a la liberté de tourner sans glisser autour d'un axe fixe. Ce qui precede fait donc connaître la condition d'équilibre de cette machine, et la charge que supporte l'axe.

Lorsque les forces se réduisent à deux, situées dans des plans perpendiculaires à l'axe, la condition d'équilibre consiste en ce que ces forces soient en raison inverse de leur distance à l'axe.

Remarque. — Les deux derniers cas particuliers que nous venons de traiter donnent une interpretation, qu'il est bon de connaître, aux six équations de l'équilibre, relatives à des axes coordonnés rectangulaires. Si l'on considère trois droites rectangulaires qui se coupent en un même point, et qu'on fixe l'une quelconque d'entre elles, de manière que le corps n'ait que la liberté de glisser le long de cet axe sans tourner, les trois premières équations d'équilibre expriment que les forces données ne permettront aucun de ces trois déplacements. Les trois autres expriment que si le corps avait successivement la liberté de tourner sans glisser autour de chacun des mêmes axes successivement, aucun de ces déplacements ne serait produit par les mêmes forces.

73. *Cas où le corps s'appuie sur un plan fixe sur lequel il peut glisser librement.* — On prendra pour plan des x, y celui sur lequel le corps s'appuie par un nombre

quelconque de points. Ce plan ne peut produire que des forces normales et de même sens, appliquées aux points de contact, et les forces ont nécessairement une résultante normale égale à leur somme. Il est donc nécessaire que toutes les forces appliquées aux corps aient une résultante parallèle à l'axe des z : d'où résultent les équations

$$\sum P\cos\alpha = 0, \quad \sum P\cos\mathcal{C} = 0, \quad \sum P(x\cos\mathcal{C} - y\cos\alpha) = 0.$$

De plus, en composant successivement les forces développées par le plan fixe, on reconnaît facilement que leur résultante ne peut avoir son point d'application en dehors du polygone convexe qui renferme tous les points de contact : il est donc nécessaire que la résultante de la force $\sum P\cos\gamma$ et des deux couples situés dans les plans ZX, ZY ait son point d'application dans l'intérieur de ce même polygone, et tende à appuyer le corps sur le plan. Réciproquement, si cette condition est remplie, l'équilibre aura lieu, parce que cette résultante pourra toujours être décomposée en forces normales au plan, et appliquées aux divers points de contact.

Ces forces devront satisfaire seulement aux trois équations données par la théorie des forces parallèles ; elles seront donc indéterminées, s'il y a plus de trois points. Si tous les points sont en ligne droite, le point d'application de la résultante devra se trouver sur cette droite, et il y aura indétermination, lors même qu'il n'y aurait que trois points. Enfin, s'il n'y avait qu'un point de contact, il serait nécessaire qu'il fût situé sur la direction de la résultante. Cette indétermination, qui indique seulement la possibilité évidente de décomposer d'une infinité de manières la résultante, ne signifie pas que le problème physique qui aurait pour objet de déterminer les efforts exercés sur le plan, aux points par lesquels le corps s'appuie, est indéterminé. Dans ce pro-

blème il faut tenir compte de la flexibilité du plan et du corps, et l'on déterminera la pression qui a lieu en chaque point d'après les hypothèses qu'on fera sur l'état élastique de ces corps. Cette question ainsi envisagée ne donne lieu à aucune difficulté de conception; mais le calcul en offre qu'on ne saurait surmonter généralement.

ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME NON RIGIDE, COMPOSÉ DE PLUSIEURS SYSTÈMES RIGIDES.

74. Lorsque tous les points d'un système ne sont pas invariablement liés les uns aux autres, on ne peut plus faire les compositions et décompositions qui réduisent toutes les forces à une seule force et un seul couple. Le principe général d'après lequel on ramène ce cas au précédent, consiste en ce qu'il est évidemment nécessaire et suffisant que chacun des systèmes rigides partiels soit en équilibre au moyen des forces qui agissent sur lui, et qui se composent, tant des forces données que de celles qui naissent de sa liaison avec les autres systèmes. Cela posé, on pourra, d'après les théories précédentes, former les équations d'équilibre de chaque système rigide, dont le nombre pourra varier d'un à six pour chacun d'eux. En éliminant les forces provenant des liaisons, on aura les équations auxquelles devront satisfaire les forces données, pour que le système composé soit en équilibre; et les équations qui auront servi à l'élimination, feront connaître les valeurs de toutes les forces de liaison, et leurs directions, quand elles ne seront pas données immédiatement.

Dans le cas particulier où l'équilibre de chaque système n'exigerait qu'une équation, et où la communication de l'un à l'autre ne donnerait lieu qu'à deux forces égales et contraires, il est facile de voir qu'il n'y a qu'une seule équation nécessaire pour l'équilibre des forces données.

En effet, soit m le nombre des systemes, on aura m équations d'équilibre et $m - 1$ forces inconnues, développées par la communication du premier avec le second, du second avec le troisieme, et ainsi de suite jusqu'au $m^{ème}$. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$ ces $m - 1$ forces. La première équation renfermera X_1, la seconde X_1 et X_2, la troisième X_2 et X_3, enfin la dernière ne renfermera que X_{m-1} sans compter toutes les forces données.

Tirant X_1 de la première et le reportant dans la seconde, puis X_2 de celle-ci et le reportant dans la troisième, et continuant ainsi, on arrivera à une dernière équation ne renfermant plus que les forces données. Ce sera la condition unique de leur équilibre; et toutes les équations précédentes feront connaître $X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$.

EXEMPLES DIVERS.

73. PREMIER EXEMPLE. — *Équilibre d'un fil flexible et inextensible, sollicité par deux forces.*

Les corps de la nature étant réellement composés de molécules très-petites, séparées les unes des autres par de très-petits intervalles, la continuité géométrique que nous leur supposons est une pure fiction, propre à simplifier les questions.

Un fil, ou un corps aussi delié que possible, est donc une suite de molécules disjointes, retenues à des distances très-petites que nous regarderons comme constantes, et, le plus ordinairement, égales. Il ne présentera donc pas la figure d'une ligne continue, mais d'un polygone dont les côtés pourront être considérés comme excessivement petits, et de longueur invariable si le fil est supposé inextensible.

Nous resterons dans la réalité de cette conception, lorsqu'elle facilitera les raisonnements; mais nous finirons toujours par substituer une courbe au polygone, parce que

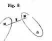
cette hypothèse simplifiera beaucoup les expressions analytiques.

On voit donc ici, contrairement à ce qui arrive ordinairement dans la géométrie, que c'est la courbe qui est la fiction, au lieu que ce soit le polygone.

Voyons maintenant comment un pareil système peut être en équilibre, lorsque deux forces sont appliquées à ses extrémités. Or, l'équilibre de chaque sommet exigeant que les côtés adjacents soient en ligne droite, le fil entier ne pourra former qu'une ligne droite. Les deux forces devront être égales, opposées et dans la direction du fil, puisque nous avons démontré que cela était nécessaire dans le cas d'un système rigide, et que l'équilibre subsisterait en rendant le fil rigide : et cela étant, il est évident que le fil ne pourra prendre aucun déplacement. Une de ces forces s'appelle la *tension du fil*.

76. Deuxième exemple. — Considérons en second lieu deux leviers, c'est-à-dire deux systèmes rigides liés respectivement à deux points fixes O, O' (*fig.* 8) autour desquels

Fig. 8.

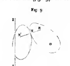


ils peuvent tourner librement, et sollicités par des forces quelconques. Un fil flexible a ses extrémités fixées en deux points M, M' de ces corps. On demande les conditions d'équilibre de ce système, qui est dans une position donnée où le fil a tous ses points en ligne droite, et peut avoir une tension inconnue quelconque.

En désignant cette tension inconnue par X, le levier MO sera en équilibre sous l'action des forces qui y sont directement appliquées, et de la force X qui agit de M vers M', il résulte de là les trois équations connues, qui renferment chacune X au premier degré. De même le corps M'O' sera en équilibre sous l'action des forces qui y sont appliquées et de la force X qui agit de M' vers M. On trouve ainsi trois nouvelles équations qui renferment encore X au premier degré.

Tirant la valeur de X de l'une de ces six équations, on connaîtra la tension du fil, et la reportant dans les cinq autres, on aura les équations de condition auxquelles doivent satisfaire les forces données pour que le système soit en équilibre.

77. Troisième exemple. — Considérons maintenant le système composé d'un levier et d'un treuil, c'est-à-dire d'un corps qui ne peut que tourner autour d'un axe fixe; le premier pouvant tourner librement autour du point O, et l'autre autour de l'axe AZ (*fig.* 9). Ils sont sollicités par



des forces quelconques et se touchent en un point M. On demande les conditions pour qu'il y ait équilibre, et la valeur de la pression mutuelle en M.

Désignant par X l'intensité inconnue de cette pression, le corps MO sera en équilibre sous l'action des forces qui

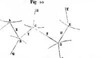
y sont directement appliquées et de la force X dirigée suivant MN. Il résultera de là trois équations qui renfermeront X et les forces proposées.

Le second corps sera en équilibre sous l'action des forces qui y sont appliquées et de X qui sera dirigée de M vers N'. L'équilibre de ce corps, qui ne peut que tourner autour d'un axe fixe, conduira à une équation unique renfermant X. On aura ainsi quatre équations, dont l'une fera connaître X, et les trois autres donneront, par la substitution de cette valeur, trois équations de condition entre les quantités données.

78. Quatrième exemple. — Prenons maintenant pour exemple un polygone formé par des droites rigides, dont les angles peuvent varier sans opposer de résistance, et dont les extrémités sont assujetties à rester sur des courbes données.

Soient ABCDE (*fig.* 10) ce polygone; P, Q, R, S, T

Fig. 10



les résultantes des forces appliquées respectivement aux points A, B, C, D, E.

Chacun de ces points doit être en équilibre au moyen des forces qui agissent immédiatement sur lui, et de la résistance de la courbe, et, par conséquent, la résultante des forces, abstraction faite de cette résistance, doit être normale à la courbe.

De même, chaque côté doit être en équilibre au moyen des forces de tout genre qui y sont appliquées; ce qui exige que les deux résultantes de toutes celles qui agissent séparément en A et en B sur cette tige, soient égales et directement opposées, et, par suite, que la direction soit celle du côté lui-même : d'où il résulte que ce côté produira deux forces égales et contraires, agissant dans la direction de cette tige.

Cela posé, désignons par X, Y, Z, U les forces que produisent ainsi les divers côtés du polygone. Soient a, b, c, d, e les angles que font les directions des forces P, Q, R, S, T avec les tangentes aux courbes données, considérées dans des sens déterminés; α, α' les angles que les directions des deux forces X font avec les tangentes en A et B; $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ les angles des forces Y avec les tangentes en B et C; et ainsi de suite.

L'équilibre du point A donnera la condition

$$P\cos a + X\cos\alpha = 0.$$

L'équilibre du point B donnera

$$X\cos\alpha' + Q\cos b + Y\cos\mathcal{C} = 0,$$

et l'on trouvera de même pour les autres points

$$Y\cos\mathcal{C}' + R\cos c + Z\cos\gamma = 0,$$
$$Z\cos\gamma' + S\cos d + U\cos\delta = 0,$$
$$U\cos\delta' + T\cos e = 0.$$

Éliminant X, Y, Z, U entre toutes ces équations, il en reste une seule entre les forces données, qui sera la condition d'équilibre du système. Les autres feront connaître les intensités des forces X, Y, Z, U.

Quant au sens dans lequel elles agissent, et qui n'est pas connu d'avance, il sera déterminé par les signes que devront avoir les cosinus des angles α, α', $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$,... Ainsi,

la première équation, faisant connaître le signe de $\cos \alpha$, détermine le sens de la force X, provenant de la tige AB et agissant en A; d'où résulte le sens de la seconde force X, appliquée en B, et par suite le signe de $\cos \alpha'$. La seconde équation fera connaître ensuite le signe de $\cos 6$, d'où résultera le sens de la force Y agissant en B; et ainsi de suite jusqu'au dernier côté.

79. Si l'une des tiges était normale à l'une des courbes, il en résulterait des conséquences particulières qu'il est bon de remarquer. Supposons, par exemple, que BC soit donnée normale à la courbe en B, on aura

$$\cos 6 = 0,$$

et les deux premières équations donneront, par l'élimination de X, une équation de condition, qui ne sera autre que la condition d'équilibre des deux forces P et Q, qui seraient appliquées à la tige unique AB, dont les extrémités seraient liées aux deux premières courbes. Cela devait être, en effet, puisque la force Y, étant détruite par la résistance de la courbe en B, doit être regardée comme n'existant pas pour les points situés du côté de B que l'on considère.

Les trois autres équations donneront, par l'élimination de Z et U, une équation qui sera celle de l'équilibre du système C, D, E, considéré isolément, et dans lequel il y aurait une force indéterminée Y agissant en C suivant la ligne BC, dans l'un quelconque des deux sens, et qui sera déterminée par cette équation. En effet, cette tige BC peut être sollicitée par une force quelconque en C dans le sens de sa longueur, sans qu'il en puisse résulter aucun déplacement, vu qu'elle sera détruite par la résistance de la courbe à laquelle elle sera normale en B.

80. Cinquième exemple. — Considérons maintenant un système de points liés entre eux par des fils flexibles et

inextensibles, et formant ce que l'on appelle un polygone funiculaire. Dans ce cas, les systèmes rigides partiels se réduisent à des points. Soient A, B, C, D (*fig.* 11) ces points; U, P, Q, R, S, V les forces qui y sont appliquées,



et dont les deux extrêmes U, V agissent par l'intermédiaire des fils ou cordons AU, DV.

Pour que ce système soit en équilibre, il faut que chacun des points A, B, C, D, soit en équilibre au moyen des forces qui y sont appliquées. Ainsi, par exemple, le point B est sollicité par trois forces qui sont les efforts exercés par les cordons BA, BC, et la force Q; ces trois forces devront donc être dans un même plan, et chacune d'elles proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres. Mais l'équilibre de chacun des cordons exige encore qu'il soit tiré par des forces égales et contraires, et dont l'intensité est la *tension* du cordon. Au moyen de ces conditions, on pourra déterminer les tensions de tous les cordons, et les rapports des forces entre elles, lorsque l'on connaîtra la figure du polygone en équilibre.

81. On peut déterminer très-simplement la tension T d'un cordon quelconque CD, en observant qu'il y a équilibre entre cette force T et la partie du système qui est située d'un côté quelconque de CD. Considérons, par exemple, les forces U, P, Q, R et T; elles ne cesseront pas d'être en équilibre si l'on rend inflexible le polygone ABC; et, par conséquent, la force T est égale et opposée à la résultante

des forces U, P, Q, R; et comme on peut transporter des forces en un point quelconque de leur résultante, sans changer leur effet, on obtient le théorème suivant :

La tension d'un cordon quelconque est la résultante de toutes les forces situées d'un même côté de ce cordon, et transportées parallèlement à elles-mêmes en un quelconque de ses points

82. Lorsque le polygone est en équilibre, il y sera encore si l'on rend sa figure invariable, et, par conséquent, toutes les forces extérieures qui y sont appliquées, doivent satisfaire aux conditions d'équilibre d'un système rigide. Si donc on les transporte parallèlement à elles-mêmes en un même point, elles doivent donner une résultante nulle, ce qui donne trois équations.

Réciproquement, si ces conditions sont satisfaites, on pourra donner au polygone une figure telle, que les forces, données de grandeur et de direction, s'y fassent équilibre.

En effet, plaçons arbitrairement le point A, et donnons au cordon AB la direction opposée à la résultante de U et P, et une tension égale à cette résultante. Donnons ensuite au cordon BC une direction contraire à la résultante de la force Q et de la tension du cordon AB, et une tension égale à cette résultante; et continuons ainsi jusqu'au dernier sommet D : la direction et l'intensité qu'il faudra donner à la force qui tiendra ce point en équilibre, seront telles, que le polygone entier y soit lui-même, elle sera donc égale et opposée à la résultante des forces U, P, Q, R, S, transportées en D, et, par conséquent, sera la force donnée V. On peut donc toujours donner au polygone une force telle, que des forces données de grandeur et de direction s'y fassent équilibre, pourvu que, transportées en un même point, elles s'y détruisent. Cette conséquence,

étant indépendante du nombre des côtés du polygone, aura lieu encore à la limite, lorsque, les côtés tendant vers zéro, il s'approchera indéfiniment de se confondre avec une courbe.

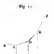
83. Si les extrémités du cordon sont fixes, les forces U et V ne sont plus données, et l'on peut encore se proposer de déterminer la forme du polygone en équilibre, et les valeurs de ces deux forces.

Pour cela, on partira de la première extrémité fixe U, et l'on supposera connues les trois composantes de la tension U; on déterminera, en conséquence, la position du point A, ainsi que les positions des autres points et les tensions de tous les cordons. Les coordonnées du point extrême du dernier cordon seront donc exprimées en fonction de celles du premier point, que l'on peut supposer nulles, et des trois composantes de la force U. En égalant ces expressions aux valeurs données des coordonnées du second point fixe, on aura trois équations qui détermineront ces composantes, ainsi que toutes les tensions et les positions de tous les sommets.

84. Si les directions des deux cordons extrêmes se rencontrent, les forces U, V ont une résultante d'où il suit que les forces P, Q, R, S en ont une égale et opposée; et, par conséquent, lorsque le polygone est en équilibre, et que les deux extrémités sont fixes, on connaîtra l'effort exercé sur chacune d'elles en prolongeant les cordons qui y aboutissent, puis transportant à leur point de concours les forces données, et les décomposant en deux forces dirigées suivant ces mêmes cordons. Chacune de ces composantes mesurera la tension du cordon correspondant, et l'effort qui sera exercé sur le point fixe où il est attaché.

85. Lorsque toutes les forces P, Q, R (*fig.* 12) sont parallèles, il est facile de voir que tout le système est compris dans un même plan. Supposons, de plus, que l'un des

Fig. 12.



cordons, BC par exemple, soit perpendiculaire à la direction des forces; remplaçons-le par une force égale à sa tension, et ne considérons que les forces situées d'un même côté de ce cordon. La tension d'un cordon quelconque DE est la résultante de toutes les forces situées d'un même côté et transportées au point D, donc la composante perpendiculaire aux forces sera constante pour tous les cordons, et égale à la tension BC; et la composante parallèle aux forces sera la somme de toutes ces forces, depuis B jusqu'en D.

86. Lorsqu'une force sollicite un point qui est retenu par plusieurs cordons, on aura la tension de chacun d'eux en décomposant cette force en d'autres qui soient dirigées suivant tous les cordons. Il y aura indétermination si leur nombre est plus grand que trois; et cela tient à l'hypothèse que l'on fait de l'inextensibilité des cordons. C'est ainsi que nous avons déjà vu que les pressions exercées par un corps qui repose sur un plan par plus de trois points, ne sont pas déterminées individuellement. Dans la réalité, les pressions en chaque point du plan et les tensions de chaque cordon sont déterminées, parce que chaque cordon

s'allonge, et chaque point de contact d'un corps sur le plan cède plus ou moins. Ces circonstances, jointes aux propriétés physiques de la matière qui les forme, font connaître chaque force en particulier, mais ces recherches sont étrangères à cette partie du cours, et nous ne nous en occuperons pas.

87. Sixième exemple. — *Équations de l'équilibre d'un fil dont tous les points sont soumis à l'action de forces données.*

Nous avons supposé jusqu'ici que les forces étaient appliquées à des points sans étendue, et qu'elles étaient en nombre fini; mais, dans bien des questions, tous les points d'un corps sont supposés soumis à l'action de forces, et ces forces ne peuvent être finies, sans quoi la plus petite partie que l'on concevrait dans le corps serait sollicitée par une force infinie, ce qui serait inadmissible. Dans toutes les questions de ce genre, on conçoit en un point quelconque du corps un volume infiniment petit dans tous les sens, dont il fasse partie et qui tendra vers zéro, en comprenant toujours ce point, à ce volume sera appliquée une force dont la direction donnée dépend de la position du point et decroissant indéfiniment avec lui et dans un rapport dont la limite est finie et donnée. Cette limite se nomme *la force appliquée au point considéré, rapportée à l'unité de volume.*

D'après cela, il est clair que, si l'on donne en fonction des coordonnées des points, la grandeur et la direction de cette force, il suffira, pour avoir la force appliquée à un volume infiniment petit dans tous les sens, de considérer un quelconque de ces points et de multiplier la *force appliquée à ce point* par ce volume : on aura l'expression de la force appliquée au volume, à un infiniment petit près, par rapport à ce volume, et il en sera de même pour sa

direction ; de sorte que l'on pourra obtenir avec exactitude les résultats qui ne dépendront que des limites des rapports ou des sommes.

88. Appliquons ces considérations générales au cas d'un fil. Soient X, Y, Z les composantes de la force qui sollicite un point quelconque du fil, et qui est rapportée à l'unité de longueur; de sorte qu'un arc infiniment petit ds soit sollicité par une force dont les composantes soient $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$. Les extrémités du fil peuvent être fixes, ou sollicitées par des forces données de direction et d'intensité; il s'agit de trouver les conditions de l'équilibre du système, qui n'est autre chose qu'un polygone funiculaire d'un nombre infini de côtés.

Or, dans cet état, un élément infiniment petit quelconque du fil, doit être en équilibre au moyen des forces qui y sont appliquées; et réciproquement, si cela a lieu, le fil entier sera en équilibre.

Soit donc ds un élément quelconque, il ne cessera pas d'être en équilibre si l'on rend sa figure invariable. Or les forces qui le sollicitent sont les tensions extérieures exercées à ses extrémités, qui sont dirigées respectivement suivant les tangentes en ces points, et de plus les forces $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$.

La tension T, variant d'une manière continue en même temps que l'arc s de la courbe, en est une fonction continue, ainsi que les cosinus $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ des angles que fait la tangente avec les axes. Les composantes de la tension, considérée dans le sens où s augmente, sont donc, aux deux extrémités de l'arc ds,

$$T\frac{dx}{ds},\quad T\frac{dy}{ds},\quad T\frac{dz}{ds},$$

et

$$T\frac{dx}{ds}+d\left(T\frac{dx}{ds}\right),\quad T\frac{dy}{ds}+d\left(T\frac{dy}{ds}\right),\quad T\frac{dz}{ds}+d\left(T\frac{dz}{ds}\right).$$

Supposons les arcs s comptés à partir de l'extrémité A (*fig.* 13), et soit MN l'arc infiniment petit ds. Les direc-

Fig. 13.



tions des deux forces tangentes aux points M et N se rencontrent si la courbe est plane, et elles peuvent être considérées comme se rencontrant même dans le cas d'une courbe à double courbure, parce que leur plus courte distance est du troisième ordre infinitésimal, ds étant du premier. Elles peuvent donc être considérées comme ayant une résultante située dans le plan osculateur, en négligeant le troisième ordre infinitésimal. Les forces qui agissent en tous les points de MN doivent donc avoir une résultante égale et opposée à la première, et, par suite, comprise dans le plan osculateur de la courbe. Les conditions cherchées de l'équilibre sont donc celles des forces appliquées à un même point, et elles doivent exprimer que les sommes des composantes parallèles à chaque axe, sont séparément nulles. Si donc on observe que les composantes $T\frac{dx}{ds}$, $T\frac{dy}{ds}$, $T\frac{dz}{ds}$ doivent être changées de signe, on aura les équations suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} d\left(T\frac{dx}{ds}\right)+X\,ds=0,\\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right)+Y\,ds=0,\\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right)+Z\,ds=0.\end{cases}$$

Si l'on multiplie la première par $\frac{dx}{ds}$, la seconde par $\frac{dy}{ds}$, la troisième par $\frac{dz}{ds}$, et qu'on les ajoute, en observant que l'on a

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{ds} d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d\frac{dz}{ds} = 0,$$

on obtiendra

$$d\mathrm{T} + \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = 0,$$

équation qui pourra remplacer une quelconque des équations (1).

Le plus ordinairement, $\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz$ est la différentielle d'une fonction $\varphi(x, y, z)$, et l'on aura alors

$$\mathrm{T} = -\varphi(x, y, z) + \mathrm{C}.$$

Dans le cas où la tension T' sera connue en un point ayant pour coordonnées x', y', z', on aura

$$\mathrm{T} - \mathrm{T}' = \varphi(x', y', z') - \varphi(x, y, z),$$

de sorte que l'on connaîtra la tension en tout autre point, en fonction de ses coordonnées; et, dans tous les cas, la différence des tensions inconnues qui ont lieu en deux points du fil, ne dépendra que des coordonnées de ces points. La valeur de T étant substituée dans deux des équations (1), on aura les équations de la courbe formée par le fil.

89. *Fil sollicité par des forces normales.* — Si la force dont les composantes sont X, Y, Z était normale en tous les points de la courbe, on aurait

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = 0;$$

$\varphi(x, y, z)$ serait constant, et, par suite, T, dans ce cas, le fil est donc également tendu en tous ses points. C'est ce qui aura lieu, par exemple, lorsqu'il sera tendu sur une surface qui ne produira aucun frottement.

On voit donc que lorsqu'un fil s'enroule sur un corps dont la surface n'exerce sur lui aucun frottement, et que l'équilibre s'établit avec des forces en dehors de la partie enroulée, les deux cordons tangents à cette surface ont une tension égale, puisque cette tension, ne variant pas dans toute l'étendue de la courbe de contact, est la même à ses deux extrémités.

Il en est de même si l'une des forces données agit sur un polygone au moyen d'un fil ou d'une tige quelconque terminée par un anneau dans lequel passe le fil polygonal : les deux côtés du polygone situés de part et d'autre de l'anneau seront également tendus.

90. La tension T étant constante, les équations (1) deviennent

$$\mathrm{T}d\frac{dx}{ds} = -\mathrm{X}ds,\quad \mathrm{T}d\frac{dy}{ds} = -\mathrm{Y}ds,\quad \mathrm{T}d\frac{dz}{ds} = -\mathrm{Z}ds,$$

d'où

$$\mathrm{T}^2\left[\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2\right] = (\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)\,ds^2,$$

ou, en désignant par P la force et par R le rayon de courbure,

$$\mathrm{T} = \mathrm{P}\,\mathrm{R},\quad \text{d'où}\quad \mathrm{P} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}}.$$

Ainsi, quelle que soit la force normale, le fil prendra une figure telle, que cette force soit en raison inverse du rayon de courbure.

D'où il suit que si la force est constante et que la courbe soit plane, elle formera un arc de cercle.

Si la force normale est la résistance d'une surface, comme elle doit toujours être comprise dans le plan osculateur de la courbe, ce dernier est normal à cette surface, et la courbe est celle de longueur minimum entre deux quelconques de ses points.

91. On peut trouver, par des considérations géométriques très-simples, la valeur de la pression exercée sur la surface. Pour cela, considérons la courbe que forme le fil comme un polygone d'une infinité de côtés égaux entre eux; la résultante des tensions des deux côtés consécutifs AB, BC sera dirigée suivant la ligne BD qui divise l'angle ABC en deux parties égales, et son intensité sera

$$2T\cos CBD, \quad \text{ou} \quad 2T\frac{BC}{BD},$$

la ligne CD étant menée perpendiculairement à BC (*fig.* 14).

Fig 14.

Si l'on représente par R le rayon du cercle qui passe par les trois points A, B, C, et qui n'est autre chose, à la limite, que le cercle osculateur de la courbe, la pression sur la surface sera mesurée par $T\frac{BC}{R}$. Lorsque BC tend vers zéro, la pression tend elle-même vers zéro; mais si l'on considère une longueur extrêmement petite α sur le fil, les normales pourront être considérées comme parallèles, et les pressions comme égales, ainsi que les rayons de courbure, en tous les sommets du polygone infinitésimal qui y seront

compris : la somme de ces pressions sera donc toujours sensiblement égale à $\frac{2T}{R}\sum BC$, ou à $\frac{T\alpha}{R}$, R étant le rayon de courbure en un quelconque des points de l'arc α. Ainsi, la valeur de la pression normale produite par le fil sur la surface, dans une étendue infiniment petite *ds*, est exprimée par $\frac{Tds}{R}$, et l'on voit qu'elle est en raison inverse du rayon de courbure au point que l'on considère.

CHAPITRE VI.

DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

92. En revenant sommairement sur tout ce qui précède, on voit que nous avons donné d'abord les équations de l'équilibre d'un point libre, puis d'un système rigide libre, sollicité par des forces quelconques; nous avons considéré ensuite ce système, assujetti à diverses conditions qui ne lui laissaient pas la liberté entière de ses déplacements : et nous nous sommes occupés enfin de systèmes non rigides, mais composés de systèmes rigides communiquant les uns aux autres. Nous avons montré comment ces dernières questions se ramènent aux précédentes, et nous en avons donné quelques exemples; mais les calculs changeraient avec les données, et tout ce que nous avons pu faire connaître de général, c'est le moyen de ramener le cas compliqué aux cas simples dont il se compose.

Le principe dont nous allons nous occuper a pour objet de renfermer dans une seule formule les équations de l'équilibre, non-seulement des systèmes examinés jusqu'ici, mais de tous ceux dont les conditions sont définies d'une manière rigoureuse, et peuvent être exprimées par la géométrie et le calcul.

Or, comme il est évident qu'on ne peut tirer d'une formule que ce qu'on y a mis, il est nécessaire, pour la démonstration de ce principe, de faire usage des conditions d'équilibre dans tous les cas auxquels on voudra l'appliquer. Et alors on se demandera peut-être si dans ces divers cas il ne serait pas plus simple d'employer directement les équations qui s'y rapportent, que de passer par

l'intermédiaire du principe à la démonstration duquel elles ont concouru.

Cette objection a quelque chose de spécieux, et il est bon d'y répondre avant d'entamer la démonstration. Nous dirons d'abord que la généralisation à laquelle ce principe conduit n'est pas comme celle que l'on obtient en réunissant dans une formule les solutions de questions de même genre, différant les unes des autres, seulement par les valeurs particulières des données. Ici le genre des questions peut être très-différent, il peut même n'être pas désigné. On comprend donc que la formule qui en contiendra les solutions devra renfermer des indications d'opérations clairement définies, mais dont la forme ne pourra être exprimée, parce qu'elle dépendra de la nature des équations qui définiront le système.

Malgré cette indécision inévitable dans une formule qui doit s'appliquer a une infinité d'espèces, et qui deviendra précise dès que l'espèce prendra une forme déterminée, cette formule offrira des avantages que l'on peut comprendre d'avance.

Elle réduira dans chaque cas la recherche des équations d'équilibre à de simples calculs bien définis, et qui s'exécuteront sur les équations qui exprimeront les liaisons des points du système, et il n'y aura nullement à s'occuper du mode d'action des forces. Ce ne sera plus un problème de la science des forces, mais de la science des nombres et de celle de l'étendue. La première science sera ramenée aux deux autres précédemment étudiées.

Il y aura encore cet avantage que la formule étant indépendante de la nature particulière des liaisons qui existent entre les points, il sera possible d'en déduire des propositions générales, applicables aux formes de liaisons les plus diverses, et à des questions n'ayant les unes avec les autres aucune analogie

ORIGINE DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

93. Galilée, cherchant à se rendre compte des raisons pour lesquelles les machines ne produisent pas toujours les avantages qu'on en espérait, en employant de petites forces à vaincre de grandes résistances, reconnut que cela tenait à ce que dans les machines non en équilibre, les espaces parcourus par les points d'application de la puissance et de la résistance, dans le sens de ces forces, étaient en raison inverse des intensités de ces forces, lorsqu'elles se faisaient équilibre sur la machine. Cette proposition peut être regardée comme le point de départ de la théorie que nous allons exposer, quoique peut-être il ne fût pas impossible d'en trouver quelque idée confuse dans les ouvrages d'Aristote.

Galilée la déduit des conditions d'équilibre qu'il démontre préalablement, et en tire la conséquence, que les machines ne peuvent servir à augmenter ce qu'il appelle improprement la *force* (ce qu'on appelle aujourd'hui le *travail*), mais seulement à la transformer; qu'on ne peut par leur moyen frauder la nature, et obtenir beaucoup en dépensant peu. Ainsi, par exemple, pour élever un certain poids à une certaine hauteur, en employant un poids dix fois plus petit, il faut que ce dernier parcoure en descendant un espace dix fois plus grand que l'autre; de sorte que l'on a réellement fait le même travail des deux côtés, savoir, dix fois celui de faire parcourir la hauteur donnée à un poids égal au dixième du poids donné.

Cette remarque est une des plus importantes dans la théorie des machines, et peut empêcher bien des illusions désastreuses dans l'industrie. Galilée la déduit des conditions de l'équilibre, et ne l'emploie pas à la généralisation de l'énoncé de ces conditions dans les différentes machines

en équilibre, mais à l'appréciation de l'utilité des machines en action.

Descartes a fait précisément l'inverse : il a admis comme évident qu'il fallait la même force pour élever un poids a une certaine hauteur, que pour élever un poids double à une hauteur moitié moindre, ou un poids triple à une hauteur trois fois moindre, et ainsi de suite; parce que, dit-il, un poids P élevé à une hauteur H est la même chose que P élevé à la hauteur $\frac{1}{2}$ H et encore P élevé à $\frac{1}{2}$ H, c'est-à-dire deux fois l'élévation de P à $\frac{1}{2}$ H. Or, c'est là ce que l'on fait en élevant 2P à la hauteur $\frac{1}{2}$ H; si ce n'est que l'on fait alors simultanément ce que l'on avait fait de l'autre manière successivement.

On voit ici la même confusion entre la force et le travail exécuté; mais il n'y aurait aucun inconvénient dans la théorie de Galilée où tout était démontré, tandis que dans celle de Descartes tout était à démontrer. En effet, il est bien évident, comme l'avait déjà dit Galilée, qu'élever un poids à une certaine hauteur, c'est faire d'un seul coup ce que l'on ferait en détail en élevant, par exemple, chaque dixième de ce poids successivement à cette même hauteur, ou un même dixième seulement, dix fois de suite à cette même hauteur, c'est-à-dire à une hauteur decuple. Mais quel rapport y a-t-il entre ces différentes manières de considérer l'élévation d'un poids, et la condition d'équilibre de deux poids sur une machine? pourquoi dans le cas d'équilibre un déplacement fictif du système donnerait-il égalité entre les produits des poids déplacés, par les hauteurs dont ils se seront élevés ou abaissés, c'est-à-dire entre ce qu'il appelle les forces développées? C'est admettre précisément ce qu'il faut prouver.

Jean Bernoulli généralisa la proposition de Galilée de la manière suivante : « Lorsque les forces quelconques sont en équilibre sur un système de points assujettis à certaines liaisons, si l'on conçoit ce système déplacé infiniment peu en satisfaisant toujours à ces conditions de liaison, la somme des produits de chaque force par le déplacement de son point d'application, projeté sur la direction de cette force, sera égal à zéro, en regardant comme positives les projections qui sont dans le sens des forces, et comme négatives celles qui sont en sens contraire. »

Bernoulli se contenta d'énoncer cette proposition générale et ne la démontra point. Il est vraisemblable qu'il y était parvenu en considérant des cas plus compliqués que ne l'avait fait Galilée, et qu'il l'avait généralisée par simple induction. Il la communiqua en 1717 à Varignon, qui en donna l'énoncé dans sa *Nouvelle Mécanique*, et ne la démontra que dans quelques cas très-simples Lagrange, dans la première édition de sa *Mécanique analytique*, l'admet comme un principe reconnu, ou, suivant sa propre expression, comme une *espèce d'axiome de mécanique*, et il se propose de le réduire en une formule générale, qui renferme la solution de tous les problèmes qu'on peut proposer sur l'équilibre des corps. Ce n'est qu'après la publication de ce grand ouvrage de Lagrange, que parut la première démonstration générale du principe en question. Elle est due à Fourier, et ne date que de 1797. Il en a paru depuis un grand nombre d'autres, et Lagrange lui-même a cru devoir en proposer une dans la seconde édition de la *Mécanique analytique*. Avant de faire connaître celle que nous avons adoptée, nous allons, en suivant la marche même de cette découverte, montrer d'abord, dans quelques cas simples, comment on a pu reconnaître la vérité de la proposition dont il s'agit.

Mais pour la commodité du langage, nous emploierons

certaines dénominations introduites par Bernoulli, et que nous allons expliquer, dans le sens précis où elles sont entendues aujourd'hui.

94. Lorsque l'on considère un système quelconque de points dans une première position, et que l'on suppose ensuite que chacun d'eux soit placé dans une position infiniment voisine de celle qu'il occupait, sans cesser de satisfaire à toutes les conditions qui dépendent de la nature du système, on nomme *vitesse virtuelle* d'un quelconque de ces points la droite qui joint sa première position à la seconde. Cette dénomination vient de ce que l'on peut concevoir que ce déplacement se fasse avec uniformité dans un même temps infiniment petit, et qu'alors les espaces parcourus sont proportionnels aux vitesses, et en outre de ce que ce déplacement n'est que possible et ne s'effectue réellement pas.

La vitesse virtuelle d'un point, *estimée suivant une direction déterminée*, est la projection de cette vitesse sur cette direction. En la mesurant par le produit de la vitesse par le cosinus de l'angle que fait la direction du déplacement avec celle suivant laquelle on estime la vitesse, les termes de l'équation que nous allons énoncer seront précisément ce qu'ils doivent être pour en établir la généralité.

Nous appellerons *moment virtuel* d'une force le produit de son intensité par la vitesse virtuelle de son point d'application, estimée suivant la direction de la force.

D'après cela, le principe de Bernoulli consiste en ce que :

Si un système quelconque de points est en équilibre, et que l'on conçoive un déplacement infiniment petit de tous ses points, qui soit compatible avec toutes les conditions auxquelles il est assujetti, la somme des moments virtuels de toutes les forces est nulle, quel que soit ce déplacement.

Et réciproquement, si cette condition a lieu pour tous les déplacements virtuels, le système est en équilibre.

Dans cet énoncé, les infiniment petits sont considérés de la manière ordinaire. L'équation n'est exacte qu'en considérant les limites des rapports, après avoir divisé par l'une quelconque des quantités infiniment petites; en d'autres termes, la somme des moments est infiniment petite par rapport à ces moments eux-mêmes.

Cela posé, passons à l'examen de cas particuliers qui prépareront à l'établissement de la proposition générale.

95. *Équilibre d'un point unique.* — L'équilibre d'un point entièrement libre exige que la somme des forces estimées suivant une direction arbitraire soit nulle; et, réciproquement, si cela est, il y a équilibre. Soient donc P l'une quelconque des forces appliquées à ce point, μ l'angle qu'elle forme avec une direction quelconque, on devra avoir

$$\sum P\cos\mu = 0;$$

et réciproquement, si cette équation a lieu pour toute direction, le point sera en équilibre. Si l'on multiplie tous les termes par une quantité arbitraire m, l'équation devient

$$\sum P m\cos\mu = 0.$$

Or $m\cos\mu$ est la grandeur m portée, à partir du point donné, sur la direction que l'on considère, et projetée sur la direction de la force P; de plus, le point étant entièrement libre, m peut être considéré comme la distance de sa première position à une autre quelconque qu'il pourrait prendre; et en la supposant infiniment petite, elle sera ce que nous avons appelé la vitesse virtuelle de ce point. Ainsi $\sum P m\cos\mu$ est la *somme* des moments virtuels des

forces; donc, si le point est en équilibre, cette somme est nulle, et réciproquement : ce qu'il fallait démontrer. On peut observer que, dans ce cas, on peut prendre, au lieu de la vitesse virtuelle, une quantité finie quelconque; et, de plus, que la somme des moments virtuels est rigoureusement nulle, et non pas seulement égale à une quantité infiniment petite par rapport à ces moments eux-mêmes.

Si l'on désigne par p la distance d'un point déterminé quelconque, pris sur la direction d'une force P à son point d'application, $m\cos\mu$ sera l'accroissement virtuel, positif ou négatif, de p, que nous représenterons par δp, et l'équation précédente s'écrira ainsi :

$$\sum P\,\delta p = 0.$$

96. Dans le cas où le point n'est pas en équilibre, il suffirait, pour qu'il y fût, que l'on introduisît une force égale et opposée à la résultante. Or la somme des moments serait alors nulle; et, de plus, deux forces égales et opposées, appliquées au même point, donnent, pour un même déplacement de ce point, des moments virtuels égaux et de signes contraires; donc *le moment virtuel de la résultante est égal, en grandeur et en signe, à la somme des moments virtuels des composantes*.

Dans cette relation, toutes les forces sont considérées en valeur absolue, et il est nécessaire d'examiner si elle se modifie lorsque les composantes sont susceptibles d'être affectées d'un signe quelconque, comme lorsqu'il s'agit d'une force P que l'on décompose en trois autres X, Y, Z, parallèles à des axes rectangulaires.

Si d'abord on suppose les trois forces positives, les variations δx, δy, δz seront en grandeur et en signes les vitesses virtuelles estimées dans le sens de ces forces respectives, et l'on aura

$$P\,\delta p = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z.$$

Si maintenant une quelconque d'entre elles, Y par exemple, est négative, la valeur absolue de la force sera — Y, mais aussi la vitesse virtuelle estimée dans le sens de cette force qui est contraire au premier sens — δy, et le moment virtuel sera toujours exprimé par Yδy; de sorte que l'équation précédente est générale, en considérant de la manière ordinaire les signes des composantes, ainsi que des coordonnées : c'est d'ailleurs ce que l'on trouverait directement en projetant sur la résultante la ligne brisée formée par δx, δy, δz et la vitesse virtuelle.

Si les axes étaient obliques, X δx ne serait pas le moment virtuel de la force X, puisque δx ne serait pas la projection de la vitesse virtuelle du point sur la direction de X; il en serait de même des deux autres composantes, et l'équation précédente ne subsisterait plus.

Remarque. — Cette propriété importante que le moment virtuel de la résultante de forces concourantes est égal à la somme de ceux des composantes, s'étendraient facilement au cas des forces parallèles qui peuvent être regardées comme limites de forces concourantes. On reconnaîtrait d'abord que le moment virtuel d'une force ne change pas lorsqu'on transporte son point d'application en un point quelconque de sa direction, lié fixement au premier; et que, dans le déplacement infiniment petit d'une droite de longueur fixe, les vitesses virtuelles de ses extrémités, estimées suivant sa direction, sont égales et de même sens, au second ordre près. Cela posé, en regardant deux forces parallèles, appliquées à deux points donnés comme limites de deux forces concourantes passant par ces mêmes points, le moment virtuel de la résultante de ces dernières étant toujours égal à la somme de ceux de ces forces, on parvient sans peine à la même conclusion pour la résultante de forces parallèles.

Mais on y parvient directement en observant que lors-

que la droite qui joint les points d'application des deux forces parallèles et de leur résultante, se déplace infiniment peu, les vitesses virtuelles de ces trois points, estimées dans la direction de cette droite, sont égales et de même sens. Et comme la résultante est égale à la somme algébrique des composantes, *son moment virtuel est égal à la somme algébrique de ceux des composantes.*

97. Si le point est assujetti à rester sur une surface fixe, nous savons qu'il est nécessaire et suffisant, pour l'équilibre, que la résultante soit normale à cette surface, et par conséquent que $\sum P\cos\mu$ soit nulle pour toutes les directions situées dans le plan tangent. On aurait donc encore, comme dans le cas précédent,

$$\sum Pm\cos\mu = 0;$$

mais on ne pourrait plus regarder m comme la distance de deux positions possibles du point, puisque l'extrémité de la ligne m ne se trouve pas sur la surface.

Mais, si l'on prend sur la surface même un point situé à une distance infiniment petite δs du premier, la direction de la droite qui les joint a pour limite celle d'une tangente quelconque à la surface, et par conséquent $\sum P\cos\mu$ est infiniment petit; donc $\sum P\delta s\cos\mu$ est infiniment petit par rapport à δs; et par conséquent, dans le sens ordinaire où l'on entend les équations infinitésimales, on a

$$\sum P\delta s\cos\mu = 0.$$

Donc, dans ce nouveau cas d'équilibre, la somme des moments virtuels des forces est nulle pour tous les déplace-

ments infiniment petits, compatibles avec les conditions de la question, et réciproquement.

98. Si le point est assujetti à rester sur une courbe fixe, il est nécessaire et suffisant, pour l'équilibre, que la résultante soit normale à la courbe, et, par suite, que la somme des forces estimées dans le sens de la tangente soit égale à zéro. D'où l'on conclut, comme dans le cas précédent, qu'en désignant par δs un arc infiniment petit de la courbe, on aura

$$\sum P \delta s \cos\mu = 0,$$

en négligeant les infiniment petits du second ordre. Il est donc nécessaire et suffisant pour l'équilibre que la somme des moments virtuels des forces soit nulle pour tous les déplacements des points, compatibles avec les conditions auxquelles il est assujetti.

Si le point n'était que posé sur la surface ou sur la courbe, nous avons déjà dit qu'il serait nécessaire, mais non suffisant, que la résultante fût normale. Les conditions que nous venons d'indiquer auraient donc encore lieu, mais ne suffiraient plus. La somme des moments virtuels ne serait plus nulle pour les déplacements d'un point suivant des droites inclinées au plan tangent, quoique ces déplacements soient compatibles avec les conditions de la question. Elle serait égale au moment de la résultante; or celui-ci est négatif, puisque la résultante doit appuyer le point sur la surface. D'où l'on conclut que, dans l'équilibre d'un point posé sur une surface, la somme des moments virtuels des forces est nulle quand le point se déplace sur la surface, et négative pour tous les autres déplacements qu'il peut subir.

99. Si nous considérons maintenant les diverses machines simples, en équilibre sous l'action de deux forces

seulement, il est facile de reconnaître que les conditions connues conduisent à cette proposition générale :

Si deux forces sont en équilibre sur un pareil système, leurs intensités sont réciproquement proportionnelles aux longueurs obtenues en projetant sur leurs directions les espaces qui seraient parcourus par leurs points d'application, si l'on faisait passer géométriquement le système dans une position infiniment voisine, en satisfaisant toujours aux conditions auxquelles il est assujetti.

Cette proposition peut être changée dans l'égalité des produits des extrêmes et des moyens. Et si l'on observe que les deux projections des espaces parcourus sont dirigées, l'une dans le sens de la force et l'autre en sens opposé; que, de plus, on convienne de prendre la première comme positive, et l'autre comme négative, la propriété générale de l'équilibre des machines s'énoncera ainsi :

Lorsque deux forces sont en équilibre sur une machine quelconque, la somme des produits de ces forces par les déplacements infiniment petits, et simultanément possibles, de leurs points d'application, projetés sur leurs directions respectives, est égale à zéro. Et réciproquement, si cela a lieu pour tous les déplacements possibles, il y a équilibre.

La même proposition s'étendrait au cas où les forces en équilibre sur la machine seraient en nombre quelconque.

100. *Cas d'un système rigide quelconque.* — Considérons maintenant un système quelconque de points liés entre eux d'une manière invariable, ou, en d'autres termes, un corps solide quelconque; ce qui comprendra les cas particuliers des lignes ou des surfaces rigides, que nous ne traiterons pas à part, pour ne pas trop multiplier les détails.

Les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre d'un corps solide sont, en désignant par X, Y, Z les composantes positives ou négatives de la force appliquée au

point quelconque dont les coordonnées rectangulaires sont x, y, z.

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0,$$

$$\sum (yZ - zY) = 0, \quad \sum (zX - xZ) = 0, \quad \sum (xY - yX) = 0.$$

Il s'agit de démontrer que ces conditions entraînent celle que, pour tout déplacement infiniment petit du système rigide, la somme algébrique de tous les moments virtuels des forces appliquées, soit nulle, et réciproquement : condition qui, d'après l'expression générale donnée précédemment pour le moment $P\delta p$, s'exprimera par l'équation

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0,$$

δx, δy, δz désignant les variations algébriques des coordonnées rectangulaires x, y, z, en passant de la position donnée à une autre voisine quelconque, si le corps est entièrement libre ; et compatible avec ses liaisons, s'il en existe. Rappelons-nous, pour cela, qu'en géométrie il est démontré, dans la théorie des déplacements des systèmes rigides, que tout déplacement infiniment petit d'un corps solide peut être regardé comme le résultant de deux autres : l'un de translation, par lequel un point quelconque, considéré comme lié au système, passera de sa première à sa seconde position ; l'autre de rotation autour de ce point, et qui peut être remplacé par trois autres effectués successivement autour de trois axes passant par ce point, en partant toujours de la position occupée par le corps après la translation. Les sommes algébriques des variations des coordonnées de chaque point dans ces divers mouvements, seront, en négligeant les infiniment petits du second ordre, les accroissements δx, δy, δz, relatifs au passage de la première position du corps à la seconde.

Le point dont le déplacement constitue la translation du système étant arbitraire, nous choisirons pour cela l'origine A des coordonnées, et nous designerons par a, b, c, les composantes de son déplacement.

Soient α, β, γ les rotations infiniment petites qu'il faut operer autour des axes des x, y, z, supposés rectangulaires, pour obtenir, comme nous l'avons dit, la nouvelle position du corps; ces quantités, considérées comme entièrement indépendantes, correspondront à toutes les positions possibles autour du point fixe. Si le corps n'était pas entièrement libre, il ne pourrait prendre toutes les positions, et α, β, γ ne seraient plus entièrement arbitraires; et il en serait de même de a, b, c; mais nous supposerons d'abord que le système ne soit nullement gêné dans ses deplacements, et puisse être transporte dans une position quelconque.

Cela pesé, la rotation α autour de l'axe AX fera varier les coordonnees x, y, z d'un point quelconque, des quantités respectives o, $-\alpha z$, $+\alpha y$, ... Désignant ces variations partielles par la caractéristique δ_1, nous aurons donc

$$\delta_1 x = o, \quad \delta_1 y = -\alpha z, \quad \delta_1 z = \alpha y.$$

Désignant de même par δ_2, δ_3 les variations provenant des rotations β, γ, nous aurons, en changeant les lettres x, y, z les unes dans les autres suivant la loi, plusieurs fois rappelée,

$$\delta_2 y = o, \quad \delta_2 z = -\beta x, \quad \delta_2 x = \beta z,$$

$$\delta_3 z = o, \quad \delta_3 x = -\gamma y, \quad \delta_3 y = \gamma x.$$

On aura donc, d'après ce qui précède,

$$\delta x = a + \beta z - \gamma y,$$

$$\delta y = b + \gamma x - \alpha z,$$

$$\delta z = c + \alpha y - \beta x,$$

et par suite

$$\sum(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)$$
$$= \sum(aX + bY + cZ)$$
$$+ \sum[X(\beta z - \gamma y) + Y(\gamma x - \alpha z) + Z(\alpha y - \beta x)],$$

ou, en réunissant les coefficients des mêmes indéterminées,

$$\sum(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)$$
$$= a\sum X + b\sum Y + c\sum Z$$
$$+ \alpha\sum(yZ - zY) + \beta\sum(zX - xZ) + \gamma\sum(xY - yX).$$

Or si le corps est en équilibre, les coefficients de $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sont nuls (n° 56); et par conséquent $\sum(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)$ est nul pour tous les déplacements infiniment petits de ce corps. Réciproquement, si cette dernière condition a lieu, il faut que le second membre soit nul, quels que soient $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$; ce qui exige que leurs coefficients soient nuls séparément : d'où résultent les six équations connues de l'équilibre. On conclut de là que :

Pour qu'un système rigide libre, sollicité par des forces quelconques, soit en équilibre, il est nécessaire et suffisant que, pour tous les déplacements infiniment petits de ce système, la somme des moments virtuels des forces soit égale à zéro.

101. *Remarque.* — Si un système de forces appliquées à un corps solide libre n'est pas en équilibre, mais peut se réduire à une force unique, *le moment virtuel de cette résultante sera égal à la somme de ceux des composantes.* Car il y aurait équilibre en introduisant une force égale et

opposée à la résultante, la somme des moments serait donc nulle : et comme celui de la force introduite est égal et de signe contraire à celui de la résultante, il s'ensuit que ce dernier est égal à la somme de ceux des forces données.

102. Considérons maintenant un corps solide qui ne soit pas entièrement libre, et dont certains points soient, ou fixes, ou assujettis à rester sur des lignes ou des surfaces fixes; et supposons des forces en équilibre sur un pareil système. Les surfaces ou lignes fixes ne pourront produire que des forces qui leur seront normales, et les points fixes pourront en produire dans des directions quelconques. Or, si l'on introduisait ces différentes forces inconnues, l'équilibre aurait lieu entre elles et les proposées, en supposant ce système entièrement libre, et, par conséquent, il est nécessaire et suffisant pour l'équilibre que la somme des moments virtuels, tant des forces données que des nouvelles forces introduites, soit nulle pour tous les déplacements possibles du système considéré comme libre.

Mais si l'on choisit seulement les déplacements compatibles avec les liaisons données, les moments virtuels seront évidemment nuls pour chacune des forces inconnues, et par conséquent :

La somme des moments virtuels des forces données sera nulle pour tous les déplacements du corps qui sont compatibles avec ses liaisons.

Réciproquement, si la somme des moments virtuels des forces données est nulle pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons, le système sera en équilibre.

En effet, supposons qu'il n'y soit pas et que sous l'action de ces forces il prenne un certain déplacement. On pourra, en introduisant de nouvelles liaisons, s'il est nécessaire, rendre ce seul déplacement possible, par exemple en fixant les courbes décrites par les différents points, et assujettis-

sent ces points à ne pas les quitter. Ces nouvelles liaisons n'empêcheront pas le déplacement d'avoir lieu; et par conséquent, dans la supposition où nous nous sommes placés, il faut admettre que les forces données ne seront pas en équilibre, malgré l'introduction de ces nouvelles liaisons. Or, si cela est, on pourra introduire une force qui mettra le système en équilibre; car il suffira de la faire agir suivant la tangente à la courbe décrite par un quelconque des points, en sens contraire du déplacement de ce point, et avec une intensité égale à celle que produirait un obstacle fixe opposé en ce point sur la courbe. Mais l'équilibre ayant lieu, la somme des moments virtuels des forces données et de cette dernière devrait être nulle, pour le déplacement en question; et comme le moment de la dernière force n'est pas nul, puisque le déplacement est dans sa direction même, la somme des moments des forces données ne serait pas nulle : ce qui serait contraire à l'hypothèse. Il ne peut donc y avoir aucun déplacement si la somme des moments des forces est nulle pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons du système. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'un corps solide n'est pas entièrement libre, il est nécessaire et suffisant, pour qu'il soit en équilibre, que la somme algébrique des moments virtuels des forces qui y sont appliquées, soit nulle pour tous les déplacements infiniment petits compatibles avec les liaisons données.

Remarque. — Le cas d'une droite rigide dont les différents points sont sollicités par des forces quelconques, rentre dans le cas général qui vient d'être traité, et par conséquent les mêmes conclusions s'y appliquent. Rien ne serait plus facile d'ailleurs que de le traiter directement. On commencerait par remplacer toute force appliquée en un point quelconque de la droite par deux autres parallèles, appliquées à ses extrémités, ce qui n'altérerait pas la

somme des moments virtuels. La démonstration s'achèverait alors sans difficulté, puisque ces deux forces, en y comprenant les résistances des surfaces ou lignes, s'il y en a, devront être égales et directement opposées.

103. *Exemple d'un système flexible.* — Considérons maintenant un fil flexible et inextensible, assujetti à passer par un point fixe sur lequel il peut glisser.

Nous avons vu qu'un fil qui n'éprouve que des résistances normales en tous ses points, excepté à ses deux extrémités, a partout la même tension, et que par conséquent les deux forces qui y sont en équilibre, sont égales et tendent à le mouvoir en sens contraire.

Ce cas général renferme celui où le fil passe sur des surfaces qui ne produisent aucun frottement, ou dans des anneaux, ou par des points fixes ; et, dans la réalité, ces deux derniers cas rentrent dans le premier. Ainsi, dans la question qui nous occupe, les deux forces en équilibre sur le fil sont égales et tirent le fil en sens contraires.

Or la liaison des deux points extrêmes ou sont appliquées les forces consiste en ce que le fil soit toujours tendu, sans quoi il n'y aurait aucune action transmise par lui, et aucune liaison entre les deux extrémités. Nous prendrons donc comme condition des déplacements virtuels, que *la somme des distances des deux points extrêmes du fil au point fixe sur lequel il peut glisser soit constante.*

En entendant de cette manière la liaison des deux points extrêmes, les projections des deux parties du fil sur leurs directions avant le déplacement virtuel, donneront donc aussi la même somme, aux infiniment petits du second ordre près; et par conséquent les projections des déplacements virtuels des extrémités sur ces mêmes directions, seront égales, en négligeant les infiniment petits du second ordre, et de plus seront dirigées d'une manière différente

par rapport aux deux forces. D'où il suit que la somme des moments virtuels de ces forces sera nulle, pour tout déplacement compatible avec les liaisons.

Réciproquement, si cette dernière condition était remplie, les forces seraient égales et tendraient à faire mouvoir le fil en sens contraire; il y aurait donc équilibre.

Remarque. — Tout ce que nous venons de dire s'applique au cas où le fil passerait par plusieurs points fixes, et sur des courbes ou sur des surfaces fixes.

DÉMONSTRATION GÉNÉRALE DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

104. Nous commencerons par définir avec précision le système sur lequel les forces données sont en équilibre.

Ce système peut être composé de parties rigides d'une étendue finie, ou corps solides, et de points sans étendue sensible. Ces points, ou des points particuliers des solides, peuvent être liés les uns aux autres par des droites inflexibles et inextensibles, ou par des fils flexibles; ils peuvent être assujettis à rester sur des surfaces ou des courbes fixes ou mobiles, sans résistance tangentielle. Les corps faisant partie du système peuvent toucher et presser, suivant la direction de la normale commune, d'autres corps mobiles et faisant aussi partie du système, ou bien des corps fixes. Enfin les surfaces de corps appartenant au système peuvent être assujetties à passer par des points fixes, sur lesquels elles peuvent librement glisser.

Cela posé, des forces quelconques étant supposées appliquées à des points d'un pareil système, il s'agit de démontrer que, pour tout déplacement virtuel, c'est-à-dire compatible avec les liaisons, la somme des moments virtuels infiniment petits est égale à zéro, et réciproquement.

Soit M un point quelconque, auquel sont appliquées des forces données P, Q, R,.... Soient F, F',... des actions exercées sur M par d'autres points M, M',... du système et dirigées suivant mm', mm'',..., ces forces seront inconnues si elles proviennent de la liaison des points par des droits de longueur constante; mais si ce sont des actions mutuelles dont la loi soit donnée, elles pourront s'exprimer en fonction des coordonnées de ces points, et nous les regarderons comme renfermées dans les forces P, Q, R. Enfin, soit N la force normale produite sur le point M par la résistance d'une surface fixe ou mobile, sur laquelle il soit obligé de rester. En introduisant toutes ces forces, le point M pourra être considéré comme libre, et s'il est en équilibre, la somme des moments virtuels sera nulle, pour tout déplacement infiniment petit, et par conséquent pour tous ceux qui seront compatibles avec les liaisons données. En entendant ainsi ces déplacements, on aura

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots \\ \quad + F\delta_1(mm') + F'\delta_1(mm'')\ldots + N\delta n + N'\delta n' + \ldots = 0, \end{array} \right.$$

la caractéristique δ_1 désignant la variation correspondante au déplacement du point m seulement.

On aura des équations analogues pour chacun des autres points. Considérons ceux qui fournissent des termes dans l'équation (1). Dans l'équation relative au point m', le terme introduit par l'action de m sera $F\delta_2(mm')$, δ_2 désignant la variation relative au déplacement de m' seul, m restant fixe. De sorte que, par l'addition de l'équation (1) et de cette seconde, les deux termes renfermant F se réduiront à $F\delta(mm')$, δ désignant la variation de la distance mm' quand les deux extrémités se déplacent pour parvenir aux positions qu'elles doivent avoir, après le déplacement virtuel donné au système entier. Or, d'après l'hypothèse, mm' a une valeur constante, donc $\delta(mm')$ est nul,

et la force F n'entrera pas dans l'équation résultant de l'addition.

Nous n'avons fait ici aucune distinction entre une tige inflexible et un fil flexible restant *rectiligne et de longueur constante*. Mais s'il s'agissait d'un fil passant par un point fixe sur lequel il pourrait glisser, ou qui pourrait glisser sur lui, les deux parties rectilignes ne seraient plus constantes, mais leur somme le serait. Les projections des espaces parcourus par les deux extrémités sur les directions respectives des fils, seraient encore égales, ainsi que les deux forces provenant de la résistance du fil; leurs moments virtuels seraient encore égaux et de signe contraire, et disparaîtraient encore dans l'addition des équations.

Supposant donc qu'on ait ajouté les équations analogues à (1) et relatives à tous les points du système, toutes les forces F, F' auront disparu. Voyons ce que deviennent les moments qui proviennent des forces N.

Si la surface qui produit la force normale N est fixe, le déplacement du point d'application s'effectuant sur cette surface même, ∂n sera nul, le moment N∂n sera donc nul; et il en sera de même de tous ceux qui proviendront de la résistance de surfaces fixes.

Si la surface est mobile, ∂n ne sera plus nul, et le moment N∂n restera dans l'équation (1). Mais le point exerce sur la surface une réaction égale et opposée, dont le moment virtuel serait par conséquent $-$ N∂n. Or le corps solide dont la surface produit la force N doit être en équilibre au moyen de toutes les forces extérieures qui y sont appliquées, et parmi lesquelles il faut compter la réaction du point. Donc, d'après ce que nous avons vu précédemment, la somme des moments virtuels de toutes ces forces est nulle, et dans cette équation se trouvera le terme $-$ N∂n; de sorte que, dans la somme des équations, les deux termes renfermant N se détruiront, et cette force inconnue

disparaitra. Il en serait de même pour tous les points assujettis à rester sur des surfaces mobiles. Enfin, il peut arriver qu'un des corps du système soit en contact avec un autre, d'où résultent des pressions normales, égales et opposées. Nous prendrons, dans ce cas, comme condition, que les deux surfaces restent tangentes après leur déplacement. Alors le plan tangent commun ne pouvant s'incliner que d'un angle infiniment petit sur sa première position, les deux points en contact peuvent être considérés après leur séparation comme étant à une même distance du premier plan tangent : distance qui devient nulle si l'une des surfaces est fixe. Le déplacement virtuel des deux points donne donc une projection égale sur la normale commune, et par conséquent les deux moments virtuels des forces de pression sont égaux et de signes contraires, ou nuls, et disparaissent dans la somme.

La même conséquence s'applique au cas où la surface de l'un des corps serait assujettie à passer par des points fixes sur lesquels elle pourrait librement glisser. Car ces points peuvent être considérés comme des surfaces infiniment petites, auxquelles la surface du corps serait assujettie à être tangente.

Il résulte de cette discussion que, dans la somme des premiers membres des équations fournies par l'équilibre des diverses parties du système, il ne reste que les moments virtuels des forces données, ou des forces mutuelles exercées par les points les uns sur les autres, suivant des lois données.

Désignant ces diverses forces sous le nom de forces *extérieures*, pour les distinguer des forces inconnues provenant des liaisons, et que nous appellerons *intérieures*, les conséquences précédentes conduisent à cette proposition générale :

Lorsqu'un système assujetti à des liaisons quelconques,

du genre de celles que nous avons définies, est en équilibre, sous l'action de forces extérieures quelconques, la somme des moments virtuels de ces forces est nulle pour tout déplacement infiniment petit compatible avec les liaisons du système.

105. *Réciproque.* — La réciproque de cette proposition est vraie, c'est-à-dire que si, pour tous les déplacements infiniment petits compatibles avec les liaisons, la somme des moments virtuels est nulle, le système est en équilibre. En effet, s'il n'y était pas, il prendrait un déplacement déterminé, et chaque point décrirait une certaine ligne, en vertu des forces données et des liaisons. Quelles que soient ces lignes, on ne changera rien au déplacement en introduisant de nouvelles liaisons qui ne permettraient au système que de prendre celui-là même qu'il prend, de telle sorte que le déplacement d'un seul de ses points déterminerait celui des autres. Ces liaisons étant supposées introduites, prenons le déplacement virtuel suivant ce déplacement, devenu seul possible. Pour ce déplacement, par hypothèse, la somme des moments virtuels sera nulle, c'est-à-dire sera un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier ; et le premier ordre sera déterminé en général par le déplacement de chaque point. Si cependant, dans un cas particulier, quelques points décrivaient dans ce déplacement des espaces infiniment petits par rapport aux autres, ce sont ces autres qu'on choisirait pour déterminer le premier ordre. Maintenant considérons un des points, correspondant à un moment virtuel infiniment petit du premier ordre ; et empêchons son déplacement, par exemple par un obstacle placé sur la ligne qu'il décrit, et qui produira une force opposée au déplacement qu'il tendait à prendre. Le point, et par suite le système, restera en repos, et la force introduite jointe aux forces données

produira l'équilibre. Donc, d'après la proposition précédente, la somme des moments virtuels sera nulle pour le déplacement dont nous venons de parler. Mais cela est impossible, puisque le moment virtuel de la force introduite est un infiniment petit du premier ordre, et que la somme des autres est par hypothèse nulle, ou d'un ordre supérieur au premier. On arrive donc à une contradiction en supposant que des forces ne soient pas en équilibre sur un système pour lequel la somme des moments virtuels est nulle, pour tous les déplacements infiniment petits compatibles avec les liaisons.

On peut donc énoncer ce principe général :

Lorsqu'un système de points, soit libres, soit assujettis à des liaisons quelconques, telles que nous les avons définies, est sollicité par des forces quelconques, il est nécessaire et suffisant, pour qu'il y ait équilibre, que la somme des moments virtuels des forces extérieures agissant sur le système, soit nulle pour tout déplacement infiniment petit compatible avec les liaisons.

C'est en cela que consiste ce qu'on appelle le *principe des vitesses virtuelles*.

Remarques. — 1° En supposant toujours les conditions sous lesquelles nous avons démontré ce principe, il est clair que si l'on change le sens de toutes les forces, il y aura encore équilibre, puisque les moments virtuels n'auront fait que changer de signe; 2° deux systèmes de forces appliquées à des points liés entre eux d'une manière quelconque, étant dits *équivalents relativement à un système de points*, lorsqu'ils peuvent se remplacer l'un l'autre sur ce système, il résulte du principe des vitesses virtuelles que la somme des moments virtuels de deux systèmes équivalents est la même, puisqu'elle est égale et de signe contraire à celle du système qui est ou qui serait en équilibre avec l'un ou l'autre.

Réciproquement, si la somme des moments virtuels de deux systèmes est la même, ils seront équivalents, car chacun d'eux ferait équilibre au système contraire à l'autre.

106. Pour exprimer le principe que nous venons de démontrer par une formule algébrique, désignons par P, Q, R,... les intensités des diverses forces appliquées aux points du système, et par $p, q, r,\ldots$ les distances de ces points à des points fixes pris sur les directions mêmes de toutes les forces, ou sur les directions contraires, la condition d'équilibre sera exprimée par l'équation

$$(2)\quad \begin{cases} P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots = 0, \\ \text{ou} \\ \sum P\delta p = 0, \end{cases}$$

la somme $\sum$ se rapportant à toutes les forces extérieures, c'est-à-dire à celles qui ne proviennent pas des liaisons du système.

Si l'on remplace chacune des forces par ses composantes parallèles aux axes X, Y, Z, et qu'on se rappelle la formule

$$P\delta p = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z,$$

démontrée générale (n° 96), en tenant compte des signes de X, Y, Z, x, y, z, l'équation (2) pourra être remplacée par la suivante :

$$(3)\qquad \sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.$$

Nous allons voir comment cette équation peut donner les conditions de l'équilibre d'un système quelconque.

Supposons d'abord, comme on le fait ordinairement, que les liaisons du système puissent être exprimées par des équations entre les coordonnées de ses différents points,

et soient

$$L = 0,\quad L' = 0,\quad L'' = 0, \ldots,$$

n équations données entre les coordonnées des m points qui composent le système; les variations de ces coordonnées satisferont aux équations

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dx}\,\delta x + \dfrac{dL}{dy}\,\delta y + \dfrac{dL}{dz}\,\delta z + \dfrac{dL}{dx'}\,\delta x' + \ldots = 0, \\ \dfrac{dL'}{dx}\,\delta x + \dfrac{dL'}{dy}\,\delta y + \dfrac{dL'}{dz}\,\delta z + \dfrac{dL'}{dx'}\,\delta x' + \ldots = 0, \\ \dfrac{dL''}{dx}\,\delta x + \dfrac{dL''}{dy}\,\delta y + \dfrac{dL''}{dz}\,\delta z + \dfrac{dL''}{dx'}\,\delta x' + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si l'on tire de ces n équations la valeur de n variations et qu'on les reporte dans l'équation (3), elle en renfermera encore $3m - n$, qui seront entièrement indéterminées. Et comme cette équation doit avoir lieu pour tous les déplacements qui satisfont aux conditions du système, elle sera satisfaite, quelque valeur que l'on donne à ces indéterminées; ce qui exige que les coefficients de chacune d'elles soient nuls séparément. On aura ainsi $3m - n$ équations, nécessaires et suffisantes pour l'équilibre. En les joignant aux n équations données, on aura un nombre d'équations égal au nombre des coordonnées des points du système.

Elles pourront servir à déterminer les positions d'un certain nombre de points d'application, ainsi que les grandeurs et les directions d'un certain nombre des forces, de manière à ce que l'équilibre ait lieu.

L'élimination de n variations entre les équations (3) et (4) peut s'effectuer de différentes manières. On pourrait tirer leurs valeurs des n équations (4) et les substituer dans l'équation (3), puis égaler à zéro les coefficients des $3m - n$ restantes; mais il vaut mieux multiplier les équations (4) par des facteurs indéterminés $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$, puis

les ajouter à l'équation (3). On égalera ensuite à zéro les coefficients des autres variations. On voit donc qu'après avoir ajouté toutes les équations, on devra annuler séparément les coefficients des $3m$ variations; n de ces équations détermineront λ, λ', λ'',..., et, en substituant leurs valeurs dans les autres, on aura les conditions d'équilibre du système.

107. L'avantage de cette méthode n'est pas d'abréger le calcul, mais de faire connaître les efforts produits par les liaisons, et les forces qui pourraient remplacer les équations qui expriment ces liaisons.

En effet, les $3m$ équations auxquelles on parvient, sont

$$(5)\quad\begin{cases} X+\lambda\dfrac{dL}{dx}+\lambda'\dfrac{dL'}{dx}+\lambda''\dfrac{dL''}{dx}+\ldots=0,\\ Y+\lambda\dfrac{dL}{dy}+\lambda'\dfrac{dL'}{dy}+\lambda''\dfrac{dL''}{dy}+\ldots=0,\\ Z+\lambda\dfrac{dL}{dz}+\lambda'\dfrac{dL'}{dz}+\lambda''\dfrac{dL''}{dz}+\ldots=0,\\ X'+\lambda\dfrac{dL}{dx'}+\lambda'\dfrac{dL'}{dx'}+\lambda''\dfrac{dL''}{dx'}+\ldots=0,\\ Y'+\lambda\dfrac{dL}{dy'}+\lambda'\dfrac{dL'}{dy'}+\lambda''\dfrac{dL''}{dy'}+\ldots=0,\\ Z'+\lambda\dfrac{dL}{dz'}+\lambda'\dfrac{dL'}{dz'}+\lambda''\dfrac{dL''}{dz'}+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Or ces équations seraient les mêmes, si les équations $L=0$, $L'=0$,... n'existaient pas, c'est-à-dire si tous les points étaient libres, et qu'on appliquât au point M une force ayant pour composantes

$$\lambda\frac{dL}{dx},\quad \lambda\frac{dL}{dy},\quad \lambda\frac{dL}{dz},\quad \lambda'\frac{dL'}{dx},\ldots,$$

au point M' une force ayant pour composantes

$$\lambda\frac{dL}{dx'},\quad \lambda\frac{dL}{dy'},\quad \lambda\frac{dL}{dz'},\quad \lambda'\frac{dL'}{dz'},\ldots,$$

et ainsi de suite pour les autres points.

Quant à la direction de ces forces, en ne considérant d'abord que celles dont les expressions renferment les dérivées de la fonction L, on voit que celle qui est appliquée en M est normale à la surface dont l'équation serait $L=0$, en ne regardant que x, y, z comme variables. Celle qui est appliquée en M' est normale à la surface dont l'équation serait $L=0$, mais dans laquelle x', y', z' seraient seules variables, et ainsi de suite pour les autres points.

Ce que nous venons de dire de l'équation $L=0$ peut se dire de toutes les autres, et dès qu'on aura déterminé, comme nous l'avons dit, les valeurs de $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$, on connaîtra les grandeurs et les directions des forces dont les diverses liaisons tiennent la place, et qui, réciproquement, pourraient remplacer ces liaisons.

CAS OÙ $L, L', \ldots$ NE DÉPENDENT PAS SEULEMENT DES COORDONNÉES.

108. Nous avons supposé que les équations $L=0, \ldots$, qui expriment les liaisons des points du système, ne renfermaient de variables que les coordonnées de ces points, de quelque nature qu'elles soient. Mais il pourrait arriver que les équations de condition fussent d'une autre forme, même quand elles seraient réductibles à celles-là; et il est possible aussi qu'elles n'y soient pas réductibles.

Pour donner un exemple du premier cas, supposons que le point dont les coordonnées sont x, y, z, soit assujetti à rester sur une surface engendrée par une courbe mobile dont les deux équations sont

$$F(x, y, z, a)=0, \quad f(x, y, z, a)=0.$$

a étant un paramètre variable qui détermine chaque génératrice de la surface, et qu'il faut éliminer entre ces deux équations pour avoir celle de cette surface.

Si l'on faisait l'élimination de a, on rentrerait dans le cas précédent; mais si l'on ne peut pas, ou si l'on ne veut pas la faire, on peut s'en dispenser. En effet, pour passer du point donné (x, y, z) à un point infiniment voisin sur la surface, il faut d'abord augmenter l'a qui s'y rapporte d'une quantité infiniment petite δa pour passer à une génératrice voisine, et changer x, y, z en $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, en exprimant que ces nouvelles coordonnées satisfont aux équations de la nouvelle génératrice, ce qui donne, en retranchant les équations deux à deux,

$$\frac{dF}{dx}\delta x+\frac{dF}{dy}\delta y+\frac{dF}{dz}\delta z+\frac{dF}{da}\delta a=0,$$

$$\frac{df}{dx}\delta x+\frac{df}{dy}\delta y+\frac{df}{dz}\delta z+\frac{df}{da}\delta a=0.$$

On aurait ainsi deux équations, au lieu d'une, entre les variations; mais aussi il y a de plus la variation δa, ce qui laisse le même nombre de variations arbitraires. On rentrerait dans le premier cas en éliminant δa entre les deux dernières équations.

109. Donnons maintenant un exemple du cas où les liaisons ne pourraient être exprimées par des équations où les coordonnées des points seraient les seules variables.

Supposons que certains points du système soumis à l'action des forces X, Y, Z; X', Y', Z';... soient assujettis seulement à rester sur une surface de forme donnée, entièrement libre, sur laquelle ils peuvent glisser en tous sens. L'équation de cette surface, par rapport à des axes qui lui seraient invariablement liés, est donnée, et on l'obtiendra par une transformation de coordonnées, rapportée aux axes

donnés. On aura de cette manière une équation entre les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la surface, et six paramètres variables avec la position de cette surface, et qui seront les trois coordonnées a, b, c du point pris pour origine des axes mobiles, et trois angles φ, θ, ψ qui déterminent leurs directions.

Soit

$$F(x, y, z, a, b, c, \varphi, \theta, \psi) = 0$$

cette équation. Il s'agit de trouver les relations qui en résultent entre les déplacements virtuels δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$,..., des points assujettis à rester sur cette surface, dans toutes les positions infiniment voisines de celle qui correspond à l'équilibre. Or les coordonnées x, y, z, après être devenues $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, doivent satisfaire à l'équation de la surface dont les paramètres sont devenus $a + \delta a$, $b + \delta b$,..., et l'on aura par conséquent, en retranchant les deux équations,

$$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z + \frac{dF}{da}\delta a + \frac{dF}{db}\delta b + \frac{dF}{dc}\delta c + \frac{dF}{d\varphi}\delta\varphi + \frac{dF}{d\theta}\delta\theta + \frac{dF}{d\psi}\delta\psi = 0.$$

On aura de même, pour le point (x', y', z'),

$$\frac{dF}{dx'}\delta x' + \frac{dF}{dy'}\delta y' + \frac{dF}{dz'}\delta z' + \frac{dF'}{da}\delta a + \frac{dF'}{db}\delta b + \ldots = 0,$$

en entendant que $\frac{dF'}{da}$, $\frac{dF'}{db}$ ne diffèrent de $\frac{dF}{da}$, $\frac{dF}{db}$ que par le changement de x, y, z en x', y', z'.

On agirait de même pour tous les points assujettis à rester sur la même surface.

Cela posé, soient λ, μ, ν,... les divers facteurs par lesquels on multipliera ces équations, pour les ajouter à celle des vitesses virtuelles, d'après la méthode précédente; en

égalant à zéro les coefficients des variations ∂x, ∂y, ∂z, $\partial x'$,..., ∂a, ∂b,..., on aura d'abord

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{lll} X + \lambda \dfrac{dF}{dx} = 0, & Y + \lambda \dfrac{dF}{dy} = 0, & Z + \lambda \dfrac{dF}{dz} = 0, \\ X' + \mu \dfrac{dF}{dx'} = 0, & Y' + \mu \dfrac{dF}{dy'} = 0, & Z' + \mu \dfrac{dF}{dz'} = 0, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}\right.$$

en supposant que x, y, z,... n'entrent pas dans d'autres équations, sans quoi on ajouterait les termes qui en proviendraient aux précédents. Et l'on aura en outre

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \lambda \dfrac{dF}{da} + \mu \dfrac{dF'}{da} + \nu \dfrac{dF''}{da} + \ldots = 0, \\ \lambda \dfrac{dF}{db} + \mu \dfrac{dF'}{db} + \nu \dfrac{dF''}{db} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les équations (6) font voir que les forces appliquées aux points x, y, z; x', y', z',... doivent être normales à la surface mobile : en les combinant avec les équations (7), on aurait, par l'élimination de λ, μ, ν,..., les conditions de l'équilibre des forces appliquées à la surface mobile.

Cet exemple suffit pour montrer comment il faudrait faire dans des cas plus compliqués.

REMARQUES SUR LES FORCES PRODUITES PAR LES LIAISONS.

110. Nous avons vu (n° 107) quelles forces pouvaient remplacer les liaisons exprimées par les équations $L = 0$, $L' = 0$,... En chacun des points auxquels sont appliquées les forces données, celles qui proviennent des liaisons donneront une résultante égale et opposée à celle des forces données; mais il ne suffirait pas de connaître les équations $L = 0$,..., pour déterminer les diverses actions exercées entre les liens matériels qui unissent les points, parce que

les mêmes équations peuvent être l'expression de liaisons d'espèce très-différente; comme aussi les mêmes liaisons peuvent s'exprimer par un ensemble d'équations très-différentes, formant un système équivalent. On ne peut donc chercher à déterminer les diverses réactions exercées dans les appareils qui établissent les liaisons, que lorsque ces appareils sont définis dans tous leurs détails, et qu'on ne se borne pas à donner les équations entre les coordonnées, qui en sont la conséquence.

Si, par exemple, un point est lié à un point fixe par une tige rigide, on aura entre les coordonnées x, y, z du premier et les coordonnées a, b, c du second l'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=l^2,$$

l désignant la longueur de la tige. Mais on aurait aussi la même équation en assujettissant le point à rester sur une sphère matérielle ayant pour rayon l et pour centre le point (a, b, c). Cette sphère pourra être rendue immobile en fixant trois quelconques de ses points, et l'on voit combien, dans ces différents cas, seront différentes toutes les actions partielles exercées dans ces divers appareils, et qui cependant donneront toujours au point mobile une résultante normale à la sphère déterminée par l'équation précédente. Il serait superflu d'insister davantage sur un point aussi évident.

CHAPITRE VII.

QUELQUES CONSÉQUENCES DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES

111. Les auteurs de traités de mécanique rationnelle ont admis jusqu'à nous, que lorsque, par l'effet de ses liaisons, un point ne peut se déplacer qu'en restant sur une courbe ou sur une surface idéale déterminée, on pouvait supprimer ces liaisons en donnant une existence réelle au lieu purement idéal de ses déplacements possibles, et assujettissant le point à y rester avec la possibilité de s'y déplacer librement.

Nous avons pensé que ce principe ne pouvait être admis, ni de lui-même, ni comme résultat de l'expérience. Certainement bien des formes de liaison peuvent donner un même lieu pour le déplacement géométrique d'un point; mais peuvent-elles se remplacer dans les questions qui dépendent de l'action des forces, parce qu'elles le peuvent dans les questions de géométrie? Cette confusion des sciences nous a paru peu philosophique, et nous l'avons rejetée. Quant à l'expérience, elle est impropre à l'établissement d'un principe indépendant de la forme des liaisons qui peut varier à l'infini, et que l'on ne pouvait vérifier que dans un nombre limité de cas.

Mais cette proposition si générale, et si commode dans les applications, peut être établie, bien simplement, au moyen du principe des vitesses virtuelles. Elle ne sera plus un principe, mais un corollaire d'un principe qu'elle servait autrefois à établir.

Pour reconnaître la vérité de cette proposition, il suffit de remarquer que tout système de liaisons qui assujettiront un point aux mêmes déplacements géométriques possibles, donneront lieu, identiquement, aux mêmes systèmes de vitesses virtuelles, et par suite aux mêmes équations d'équilibre.

Ainsi, par exemple, si les deux côtés d'un angle constant sont assujettis à rester dans un plan donné, et à passer par deux points fixes sur lesquels ils peuvent glisser librement, le sommet de cet angle ne pourra que se mouvoir sur un arc de cercle qui n'a aucune existence matérielle. Si maintenant on applique des forces quelconques à ce point, il faudra, pour qu'il y ait équilibre, qu'elles soient détruites par celles que les deux points fixes peuvent produire et qui seront normales aux côtés qui n'offrent, par hypothèse, aucune résistance dans le sens de leur longueur. La résultante des forces données doit donc être égale et opposée à celle que donneront ces deux forces normales. Or, leur point de rencontre joint au sommet de l'angle sera un diamètre du cercle, lieu du sommet; il faut donc que la résultante des forces soit normale à l'arc de cercle, lieu géométrique du sommet, d'après les liaisons données. D'ailleurs, cette résultante peut avoir une intensité quelconque, puisqu'elle peut être décomposée en deux forces qui seront détruites par les points fixes qui sont supposés susceptibles d'une résistance indéfinie.

On vérifie ainsi, que l'on arrive aux mêmes conditions pour l'équilibre du point, que si l'on avait supprimé les liaisons données et qu'on leur eût substitué le lieu géométrique rendu matériel, en assujettissant le point à ne pas le quitter.

PROPRIÉTÉ DE MAXIMUM OU DE MINIMUM.

112. Lorsque l'expression $\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ sera la variation d'une certaine fonction de $x, y, z; x', y', z', \ldots$ traitées comme variables indépendantes, l'équation donnée par le principe des vitesses virtuelles montre que, dans la position d'équilibre, cette fonction est, en général, un maximum ou un minimum par rapport à toutes les valeurs qu'elle peut prendre lorsque le système subit un déplacement infiniment petit quelconque, compatible avec ses liaisons; le minimum correspond au cas de l'équilibre instable, et le maximum au cas de l'équilibre stable. Mais cette discussion nous écarterait trop de notre objet et nous nous bornerons à cette indication. Nous appliquerons tout à l'heure cette proposition au cas particulier des forces parallèles produites par la pesanteur.

113. *Application au cas de forces quelconques.* — Soient P, P',... des forces en équilibre sur un système quelconque; M, M',... leurs points d'application. Prenons à partir de ces points, et sur la direction des forces, des longueurs finies MN, M'N',... proportionnelles à ces forces, et désignons-les par $p, p', \ldots$, de telle sorte que l'on ait

$$p = k\text{P}, \quad p' = k\text{P}', \ldots.$$

Le théorème que nous voulons démontrer consiste en ce que la somme $p^2 + p'^2 + \ldots$ ou $\sum p^2$ sera un maximum ou un minimum, parmi toutes les valeurs qu'elle peut prendre lorsque, les points N, N',... restant fixes, les points M, M',... subissent un déplacement virtuel quelconque, compatible avec les liaisons du système.

En effet, soient L (*fig.* 15) une position infiniment voisine

Fig. 15.



que peut prendre le point M; H sa projection sur la direction de la force P; θ l'angle PML, faisons $ML = r$, $MH = \partial p$.

Le principe des vitesses virtuelles donne pour tous les deplacements possibles $\sum Pr\cos\theta = 0$; et, par conséquent, en multipliant tous les termes par k,

$$(1) \qquad \sum pr\cos\theta = 0, \quad \text{ou} \quad \sum p\partial p = 0,$$

équation qui equivaut à

$$(2) \qquad \partial \sum p^2 = 0.$$

Or c'est là une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que $\sum p^2$ soit un maximum ou un minimum, pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons du système.

Pour reconnaître si réellement $\sum p^2$ est un maximum ou un minimum, calculons exactement son accroissement. Si nous désignons par p_1 la valeur NL de p après le déplacement virtuel arbitraire, nous aurons

$$p_1^2 = p^2 - 2pr\cos\theta + r^2,$$

d'où

$$\sum p_1^2 = \sum p^2 - 2\sum pr\cos\theta + \sum r^2.$$

L'accroissement de $\sum p^2$ est donc

$$(3)\quad \begin{cases} \delta\sum p^2 = -2\sum pr\cos\theta + \sum r^2 \\ \qquad = -2k\sum \mathrm{P}r\cos\theta + \sum r^2. \end{cases}$$

Or, si l'on avait rigoureusement l'équation $\sum \mathrm{P}_1\cos\theta = 0$, $\delta\sum p^2$ se réduirait à $\sum r^2$ qui est essentiellement positive, d'où il suivrait que $\sum p^2$ serait toujours minimum. Mais nous avons fait remarquer, dans la démonstration du principe des vitesses virtuelles, que $\sum \mathrm{P}_1\cos\theta$ n'était pas généralement nul, mais infiniment petit du second ordre, et comme $\sum r^2$ est du même ordre, les deux parties de $\delta\sum p^2$ sont comparables, et l'on ne peut rien dire d'absolu sur le signe du résultat. Cependant on peut faire quelques remarques importantes à cet égard.

Supposons d'abord que $\sum \mathrm{P}r\cos\theta$ soit de même signe pour tous les déplacements virtuels, il faudra distinguer deux cas.

S'il est négatif, les deux termes de l'expression (3) seront positifs, et par conséquent $\sum p^2$ sera un minimum, quelle que soit la valeur du rapport k, depuis zéro jusqu'à l'infini.

S'il est positif, la première partie de $\delta\sum p^2$ sera négative;

et comme elle varie proportionnellement à k, on pourra donner à ce rapport une valeur assez grande pour que cette première partie l'emporte sur la seconde $\sum r^2$, quel que soit le déplacement virtuel, et cela aura lieu depuis cette valeur de k jusqu'à l'infini : dans toute cette étendue, $\sum p^2$ sera maximum. Il pourra arriver qu'entre cette limite inférieure de k, et une autre valeur plus petite, la première partie de (3) soit tantôt supérieure, tantôt inférieure à la seconde; entre ces limites, il n'y aura ni maximum ni minimum.

Mais ce qui est très-remarquable, c'est que, dans tous les cas, et lors même que $\sum Pr\cos\theta$ n'a pas le même signe pour tous les déplacements virtuels, on peut donner au rapport k, et, par suite, aux longueurs $p, p', \ldots$, des valeurs assez voisines de zéro, pour que la première partie de (3) soit incomparablement plus petite que $\sum r^2$, d'où il résulte que $\sum p^2$ sera minimum, puisque son accroissement sera toujours positif. Cette dernière proposition est due à M. Gauss; elle n'est qu'un cas particulier d'un théorème que cet illustre géomètre a donné dans le cas d'un déplacement quelconque : c'est celui où l'on supposerait qu'il se réduirait à zéro. On peut dire aussi que ce théorème est renfermé dans la proposition précédente, en vertu du principe de d'Alembert, dont nous parlerons plus tard.

Il est bon de remarquer que ce n'est pas seulement dans le voisinage de $k=0$, que $\sum p^2$ sera nécessairement un minimum ; il en sera ainsi depuis cette limite jusqu'à une certaine valeur finie de k, pour laquelle la première partie

de $\delta \sum p^2$ cessera d'être inférieure à la seconde, pour tous les déplacements virtuels.

On peut observer encore que lorsque, pour une valeur de k, $\sum p^2$ sera maximum, il suffirait de porter les quantités p dans le sens opposé, pour que $\sum p^2$ devînt minimum : car alors $\cos\theta$ changerait de signe sans changer de valeur, et les deux parties de $\delta \sum p^2$ seraient positives. Il y aurait donc minimum en considérant cette même valeur de k avec le système des forces égales et contraires aux premières, et qui seront en équilibre en vertu du principe des vitesses virtuelles.

114. Nous avons fait connaître, dans ce qui précède, les conditions d'équilibre d'un système quelconque de points assujettis à des liaisons arbitraires rigoureusement définies, et sollicitées par des forces quelconques, nous avons vu comment les équations qui déterminent l'équilibre, et dont la forme doit nécessairement dépendre du mode de liaison des points, peuvent être renfermées dans une seule formule générale qui permet dans chaque cas de former les équations particulières qui s'y rapportent, au moyen de simples calculs dont la marche est complétement déterminée.

Après avoir ainsi établi les principes généraux de cette partie importante de la science des forces, qui traite de leur équilibre, il nous reste à établir ceux qui se rapportent aux déplacements qu'elles peuvent produire. Mais avant d'entamer cette partie beaucoup plus difficile de la science, nous croyons convenable d'appliquer à quelques questions particulières les théories de la première. Nous

les choisirons de manière à ce qu'elles offrent quelque utilité soit dans la pratique, soit dans les théories qui doivent suivre, et que l'exécution des opérations indiquées par la théorie offre un nouvel exemple de l'emploi si utile des considérations infinitésimales.

CHAPITRE VIII.

APPLICATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES AUX FORCES PARALLÈLES PRODUITES PAR LA PESANTEUR

115. L'expérience montre que tous les liquides, dans l'état de repos, ont leur surface extérieure plane, pourvu qu'elle ait une étendue assez grande pour que la légère déformation, qui a lieu au contact des corps solides qui en forment les bords, puisse être négligée. Les plans qui terminent les liquides en repos dans un même lieu sont parallèles; ils ne seraient inclinés les uns sur les autres que si leur distance devenait considérable. Nous supposerons dans tout ce qui va suivre que le parallélisme soit parfait.

Nous leur donnerons la dénomination de *plans horizontaux*, et les droites perpendiculaires à ces plans s'appelleront des *verticales*; elles auront donc toutes une même direction, qu'on appellera la *verticale du lieu*.

Cela posé, l'observation de tous les instants fait voir que tous les corps abandonnés à eux-mêmes sans aucune impulsion, tombent suivant la verticale, quand on peut les garantir de toute déviation produite par l'air environnant. S'ils sont retenus, ils exercent sur l'obstacle une pression verticale. Si, par exemple, un corps est suspendu par un fil, ce fil prend une direction verticale, et si l'on rompt ce fil, sans donner aucune impulsion initiale au corps, il tombe suivant le prolongement de cette droite. De plus, tant que ce corps est soutenu, le fil est tendu sans interruption; et l'expérience montre que cette tension est constante.

On peut donc admettre que tous les corps sont sollicités par une force dirigée suivant la verticale, et vers l'intérieur de la terre, et que cette force exerce son action d'une manière continue, avec une intensité constante, sur les corps qui restent en repos. Nous verrons plus tard que cette intensité est la même encore pendant le déplacement. La cause de ces phénomènes se nomme *pesanteur* ou *gravité*. La surface de la terre, ou mieux de la mer, étant à peu près sphérique, la perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles passe sensiblement par le centre de la terre; et change, par conséquent, de direction avec la position de la surface; son intensité change quand on s'éloigne ou qu'on s'approche du centre, et dans le même rapport pour tous les corps.

Mais ces variations ne sont pas sensibles dans une petite étendue; et l'on peut regarder les verticales comme parallèles, et la pesanteur comme constante, pourvu que l'on considère des points peu éloignés les uns des autres, relativement au rayon de la terre. C'est ce qu'il a été facile d'établir par des expériences précises.

Au reste, c'est indépendamment de toute notion sur la figure de la terre, que l'on constate, par l'expérience, le parallélisme des verticales et la constance de la pesanteur dans une étendue beaucoup plus considérable que les dimensions des corps que nous avons en vue de considérer ici. Nous les admettons donc comme des données fournies par des expériences directes.

La pesanteur sollicite les parties intérieures des corps comme les parties extérieures. Il faut faire le même effort pour supporter un corps entier, ou les parties dans lesquelles on le divise; et, s'il est creux, les corps que l'on y renfermera exerceront le même effort que s'ils étaient placés à l'extérieur. Nous pouvons donc regarder cette force comme agissant sur toutes les parties qui composent les

corps; et nous en verrons une confirmation complète dans leur chute suivant la verticale.

En appliquant la théorie des forces parallèles à celles qui proviennent de la pesanteur, on reconnaît d'abord qu'elles ont une résultante qui leur est parallèle, et est égale à leur somme; on l'appelle le *poids* du corps.

En second lieu, cette résultante a son point d'application indépendant de la direction des forces relativement au corps. C'est le centre des forces parallèles produites par la gravité. On lui donne le nom de *centre de gravité*.

116. Lorsque la matière qui compose le corps est homogène, les volumes égaux ont des poids égaux. Si la matière de deux corps homogènes est différente, le poids est généralement différent pour des volumes égaux. On appelle *poids spécifique* d'une substance homogène le poids de l'unité de volume, ou, ce qui est la même chose, le rapport du poids d'un volume quelconque de cette substance à ce volume même. Dans les Tables que l'on a formées, on rapporte ces poids spécifiques à celui de l'eau distillée, prise à la température où sa densité est la plus grande, et qui est d'environ 4 degrés au-dessus de zéro: quant aux autres corps, on les suppose pris à la température zéro. Les moyens employés pour la formation de ces Tables se rapportent à la physique, et nous ne nous en occuperons pas.

Le poids qu'on a choisi pour terme de comparaison est celui d'un centimètre cube d'eau distillée, prise au maximum de densité, et considéré à l'Observatoire de Paris; on le nomme *gramme*. Les nombres renfermés dans la Table des poids spécifiques expriment donc le nombre de grammes que pèse un centimètre cube de ces substances, prises à la température zéro.

117. Si le corps n'est pas homogène, le poids ne sera plus proportionnel au volume. Pour se faire une idée nette

de ce que l'on doit entendre par poids spécifique d'une substance en un point donné, on en considérera une portion infiniment petite en tous sens, dont ce point fera partie, et l'on prendra le rapport de son poids à son volume; on aura ainsi son poids spécifique moyen; lorsque ce volume tendra vers zéro, le rapport tendra généralement vers une limite, que nous appellerons *poids spécifique de la substance en ce point*. Si la nature de cette substance change d'une manière continue, le poids spécifique sera une fonction continue des coordonnées des différents points; et si cette fonction est donnée, ainsi que la figure du corps, on peut encore se proposer d'en déterminer le centre de gravité. On voit, d'après cette définition, qu'un volume infiniment petit du corps aura un poids qui ne différera que d'une quantité infiniment petite, par rapport à lui-même, du produit de ce volume par le poids spécifique relatif à l'un quelconque de ses points. Cette quantité pouvant être négligée sans erreur dans les résultats des questions qui ne dépendent que des limites des sommes ou des rapports, il s'ensuit que le poids spécifique, tel que nous l'avons défini, joue absolument le même rôle dans le cas des corps non homogènes que le poids spécifique défini d'abord dans les corps homogènes; seulement, il ne faut l'appliquer qu'à des volumes infiniment petits dans tous les sens.

118. Quoique les surfaces et les lignes ne puissent avoir de poids, puisqu'elles ne sont que des limites d'étendue et ne renferment aucune partie matérielle, on les considère néanmoins comme ayant un centre de gravité. On suppose alors qu'elles sont soumises à l'action de forces parallèles, qui, dans le cas de l'homogénéité, donnent des résultantes égales pour des parties équivalentes; et l'on donne l'intensité de cette force pour l'unité de surface ou de longueur. En partant de cette hypothèse, et considérant toujours les

surfaces et les lignes comme on le fait dans la géométrie, il n'y a rien que de clair dans la recherche du centre de ces forces parallèles, qu'on nomme, par analogie, *centre de gravité*.

Si les résultantes n'étaient pas égales pour des aires équivalentes, on concevrait, pour un point quelconque, une portion infiniment petite en tous sens, renfermant ce point, et on prendrait le rapport de la résultante de cette portion à son aire. La limite de ce rapport sera déterminée, et nous lui donnerons, par analogie, le nom de *poids spécifique de la surface en ce point*, ce poids spécifique sera une fonction connue des coordonnées des points de la surface, et le centre des forces parallèles, que l'on désignera encore sous le nom de *centre de gravité*, sera entièrement déterminé.

Les mêmes considérations s'appliquent au cas d'une ligne dans laquelle des arcs égaux ne donneraient pas des résultantes égales.

119. Les corps sont réellement composés de parties très-petites, séparées les unes des autres; mais il n'y a aucun inconvénient à les supposer formés d'une matière continue; car cela ne produira d'autre effet que de changer de quantités insensibles les points d'application des forces, et il n'en peut résulter aucune erreur appréciable dans les résultats.

Lorsque l'on connaît les poids et les centres de gravité de corps en nombre fini, le théorème des moments donne immédiatement la position du centre de gravité du système. Si l'on désigne par P un quelconque des poids, par x, y, z les coordonnées de son centre de gravité, et par x_1, y_1, z_1 celles du centre de gravité du système, on aura

$$x_1 = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P}, \quad y_1 = \frac{\Sigma P y}{\Sigma P}, \quad z_1 = \frac{\Sigma P z}{\Sigma P}.$$

Ces formules subsistent, quel que soit le nombre de corps, et quelque petits qu'ils soient chacun S'ils diminuent indéfiniment, et que leur système tende vers une certaine limite, les limites des valeurs de x_1, y_1, z_1 seront les coordonnées du centre de gravité de cette limite, et leurs valeurs ne seront pas altérées, si l'on néglige, dans tous les termes de ces sommes, des quantités infiniment petites par rapport à ces termes mêmes.

DÉTERMINATION DES CENTRES DE GRAVITÉ.

120. Lorsqu'un corps de nature quelconque est infiniment petit dans tous les sens, son centre de gravité est à une distance infiniment petite d'un quelconque des points de ce corps; car, si l'on compose successivement toutes les forces, en partant d'un point quelconque du corps, les points d'application des résultantes successives étant toujours compris entre les deux points d'application des forces que l'on compose, resteront constamment à une distance infiniment petite de tous les points du corps. Cette simple observation permet de ramener au calcul la détermination des centres de gravité des corps, sans aucune recherche préalable. Il suffira, pour cela, de les décomposer en éléments infiniment petits dans tous les sens, parce qu'alors on pourra prendre pour centre de gravité de ces éléments un point quelconque de leur surface ou de leur intérieur, ou même en dehors, et à une distance infiniment petite; car on n'altérera qu'infiniment peu les coordonnées du centre de gravité de chacun de ces éléments, et, par conséquent, son moment ne sera en erreur que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même. Donc la limite de la somme des moments ne sera pas altérée, et l'on peut établir cette proposition générale :

Le produit du poids d'un corps par la distance de son

centre de gravité à un plan quelconque, est égal à la limite de la somme des produits des poids de chacun de ses éléments infiniment petits en tous sens, par les distances d'un quelconque des points de ces éléments respectifs, ou d'autres points infiniment voisins, à ce même plan.

Si le corps est homogène, le poids d'une quelconque de ses parties est égal à son volume multiplié par le poids spécifique de la substance; mais, s'il ne l'est pas, le poids d'un élement sera égal à son volume multiplié par un poids spécifique moyen, qui ne différera que d'une quantité infiniment petite du poids spécifique de la substance en un quelconque des points de cet élément. Ainsi, dans ce cas, on multipliera le volume infiniment petit de l'élement par le poids spécifique relatif à l'un quelconque de ses points, ou des points infiniment voisins, et, en substituant ce produit au poids réel de l'element, il n'en resultera aucune erreur dans la limite de la somme des poids, et de leurs moments.

Ces propositions peuvent facilement être exprimées par des formules infinitésimales.

Désignons par p la fonction de x, y, z qui représente le poids spécifique en un point quelconque du corps; par P son poids total et par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son centre de gravité; on aura, pour déterminer ces quatre quantités, les équations suivantes :

$$P = \int\int\int p\,dx\,dy\,dz,$$

$$Px_1 = \int\int\int px\,dx\,dy\,dz,$$

$$Py_1 = \int\int\int py\,dx\,dy\,dz,$$

$$Pz_1 = \int\int\int pz\,dx\,dy\,dz.$$

Les trois dernières s'obtiennent en prenant les moments de tous les éléments du corps par rapport aux trois plans coordonnés rectangulaires.

Les intégrations doivent être faites dans toute l'étendue du corps. Elles se simplifient beaucoup lorsque le corps est homogène, p n'étant plus alors qu'un facteur constant.

Si les points étaient déterminés par des coordonnées polaires r, θ, ψ, on prendrait toujours les moments par rapport aux trois plans coordonnés, et on déterminerait encore les coordonnées rectangulaires x_1, y_1, z_1 du centre de gravité; on pourrait ensuite en déduire ses coordonnées polaires r_1, θ_1, ψ_1.

Les quatre équations précédentes seraient remplacées par celles-ci

$$\mathrm{P} = \iiint p r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi \, dr,$$

$$\mathrm{P} x_1 = \iiint p r^3 \sin^2\theta \cos\psi \, d\theta \, d\psi \, dr,$$

$$\mathrm{P} y_1 = \iiint p r^3 \sin^2\theta \sin\psi \, d\theta \, d\psi \, dr,$$

$$\mathrm{P} z_1 = \iiint p r^3 \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\psi \, dr$$

Les intégrations s'effectueront dans toute l'étendue du corps suivant les règles données dans le calcul intégral.

On obtiendrait semblablement les formules relatives aux centres de gravité des surfaces et des lignes. Pour ces détails et les applications particulières nous renverrons aux traités spéciaux.

DIVERSES PROPRIÉTÉS DES CENTRES DE GRAVITÉ.

121. *Propriété de maximum et de minimum.* — Pour traiter cette question avec toute la généralité qu'elle comporte, il faut définir avec précision ce que l'on entend par

le centre de gravité d'un système dont la forme est variable.

Les règles que nous avons données pour la composition des forces, supposent que les points auxquels elles sont appliquées sont liés invariablement entre eux; elles ne s'appliqueraient pas s'il en était autrement, et des forces parallèles appliquées à un système non rigide ne donneraient ni résultante, ni centre des forces; la pesanteur ne donnerait donc pas lieu à la considération d'un centre de gravite pour un pareil système, et une seule force ne pourrait pas remplacer les forces données.

Néanmoins, en considérant que des propositions importantes qui s'expriment très-simplement au moyen du centre de gravité d'un système rigide, auraient un énoncé plus compliqué dans le cas d'un système variable, tandis que, par une légère extension de définition, un seul énoncé suffirait pour tous les cas, on a fait ce que nous avons fait ressortir tant de fois, et l'on a donné la définition suivante du centre de gravité : « Le centre de gravité d'un système » rigide pesant, est le point d'application de la résultante » des forces produites par la pesanteur; et, lorsque le système est variable, c'est le point qui serait le centre de » gravité ainsi conçu, si à l'instant que l'on considère le » système devenait rigide, avec les positions relatives » qu'ont alors tous ses points. »

122. Cela posé, considérons un système quelconque de corps pesants liés entre eux d'une manière quelconque; prenons l'axe des z vertical, en sens contraire de la pesanteur ; désignons par p le poids spécifique en un point quelconque et par dv l'élément de volume. Les trois composantes de la force appliquée à dv auront pour valeurs

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -p\,dv,$$

et le principe des vitesses virtuelles donnera $\sum Z\,\delta z = 0$, ou

$$\sum p\,dv\,\delta z = 0,$$

δz étant l'accroissement que le déplacement virtuel du système fait prendre au z d'un point de l'élément infiniment petit dont le poids est $p\,dv$.

Or $p\,dv\,\delta z$ est l'accroissement que subit le produit $zp\,dv$ par ce déplacement, et par conséquent $\sum p\,dv\,\delta z$ est l'accroissement que prendra $\sum zp\,dv$. L'équation précédente devient donc

$$\delta \sum zp\,dv = 0.$$

Mais si l'on désigne par P le poids total du système et par z_1 le z du centre de gravité, on aura

$$\sum zp\,dv = Pz_1,$$

et, par suite,

$$\delta Pz_1 = 0,$$

ou simplement

$$\delta z_1 = 0.$$

Les variations désignées par δ se rapportent à tous les déplacements virtuels des points du système, compatibles avec leurs liaisons entendues avec la généralité que comporte le principe des vitesses virtuelles; et z_1 est l'ordonnée du centre de gravité entendu comme nous l'avons indiqué précédemment.

On peut donc dire qu'en général z_1 est maximum ou minimum; ce qui donne cette proposition remarquable :

Lorsqu'un système de points pesants, assujettis à des

liaisons quelconques est en équilibre, son centre de gravité est généralement le plus haut ou le plus bas possible.

123. *Autres propriétés.* — Soit un nombre quelconque de corps ayant respectivement pour poids $p, p', p'', \ldots$ et dont les centres de gravité respectifs soient distants du centre de gravité de leur système, de quantités $\rho, \rho', \rho'', \ldots$, prenons ce centre pour le point de rencontre de trois axes rectangulaires avec lesquels les lignes $\rho, \rho', \rho'', \ldots$ font les angles $\alpha, 6, \gamma, \alpha', 6', \gamma', \ldots$ Le théorème des moments donnera, relativement aux trois plans coordonnés,

$$\sum p\rho\cos\alpha = 0, \quad \sum p\rho\cos 6 = 0, \quad \sum p\rho\cos\gamma = 0.$$

Donc *il y aurait équilibre entre des forces appliquées à un point situé à l'origine, c'est-à-dire au centre de gravité du système, dirigées suivant les droites $\rho, \rho', \ldots$, et proportionnelles aux produits $p\rho, p'\rho'$.* La réciproque est évidente.

Si les poids $p, p', \ldots$ sont égaux, les forces sont proportionnelles aux distances du centre de gravité du système, aux centres de gravité des poids égaux qui le composent.

124. Si maintenant on ajoute les carrés des premiers membres des équations (1), on obtient, en désignant par $\widehat{\rho\rho'}$ l'angle des deux rayons ρ et ρ',

$$\sum p^2\rho^2 + \sum 2pp'\rho\rho'\cos\widehat{\rho\rho'} = 0.$$

Mais $\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\widehat{\rho\rho'} = r^2$, r étant la distance des centres de gravité des corps p, p', donc

$$\sum p^2\rho^2 + \sum pp'(\rho^2 + \rho'^2 - r^2) = 0.$$

Tous les termes qui renferment ρ^2 ont pour expression $p\rho^2(p + p' + p'' + \ldots)$, et l'on en trouverait de sem-

blables pour ρ'^2, $\rho''^2, \ldots$; de sorte qu'en posant

$$p + p' + p'' + \ldots = \mathrm{P},$$

on aura

$$\mathrm{P}\sum p\rho^2 = \sum pp'r^2.$$

Si tous les poids sont égaux et en nombre m, on a

$$\sum r^2 = m\sum \rho^2.$$

Cette dernière proposition est un cas particulier de la suivante, où l'on suppose que l'origine des coordonnées est un point quelconque de l'espace. Le théorème des moments donne alors, en représentant par R la droite menée de l'origine au centre de gravité du système; par a, b, c les angles qu'elle fait avec les axes; par $\rho, \rho', \ldots$ les distances de l'origine aux centres de gravité des corps $p, p', \ldots$, et par $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \ldots$ les angles que ces droites forment avec les axes,

$$\mathrm{PR}\cos a = \sum p\rho\cos\alpha,$$

$$\mathrm{PR}\cos b = \sum p\rho\cos\beta,$$

$$\mathrm{PR}\cos c = \sum p\rho\cos\gamma,$$

d'où, en ajoutant les carrés des membres de ces équations, et observant que les seconds membres sont les mêmes que dans le cas précédent,

$$\mathrm{P}^2\mathrm{R}^2 = \mathrm{P}\sum p\rho^2 - \sum pp'r^2.$$

De cette équation on conclut que *si la distance* R *du centre de gravité d'un système à un point fixe quelconque restant constante, ce système invariable de forme se déplace d'une manière quelconque, la somme des produits*

des poids par les carrés des distances de leurs centres de gravité à ce point fixe, sera constante.

En effet, R étant constant ainsi que les distances désignées par r, il en résulte que $\sum p\rho^2$ est constant.

On voit encore que $\sum p\rho^2$ est le plus petit possible quand R = 0, et par conséquent le centre de gravité d'un système jouit de cette propriété, que *la somme des produits des poids par les carrés des distances de leurs centres de gravité respectifs à ce point est un minimum.*

THÉORÈME DE GULDIN.

125. Le volume V, engendré par la surface plane comprise entre deux courbes dont les ordonnées sont y, Y, et deux parallèles à l'axe des y, correspondantes aux abscisses x_0, X, a pour expression

$$V = \pi \int_{x_0}^{X} (Y^2 - y^2)\,dx.$$

Mais l'ordonnée y_1 du centre de gravité de la surface en question, dont nous désignerons l'aire par A, est donnée par l'équation

$$Ay_1 = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{X} (Y^2 - y^2)\,dx,$$

donc

$$V = 2\pi y_1 A,$$

et, par conséquent, *le volume engendré par une aire plane, tournant autour d'un axe situé dans son plan, est égal au produit de cette aire par la circonférence décrite par son centre de gravité.*

126. La surface A, engendrée par la révolution d'un arc de courbe plane, tournant autour d'un axe situé dans

son plan, a pour expression

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{X} y\,ds.$$

Mais l'ordonnée y_1 du centre de gravité de l'arc s est donnée par l'équation

$$sy_1 = \int_{x_0}^{X} y\,ds;$$

donc

$$A = 2\pi y_1 s,$$

et, par conséquent, *l'aire engendrée par un arc de courbe plane, tournant autour d'un axe situé dans son plan, est égale à cet arc multiplié par la circonférence décrite par son centre de gravité*. Ces deux propositions constituent ce que l'on appelle le *théorème de Guldin*.

Les aires ou les volumes décrits dans une partie quelconque de la révolution, étant proportionnels à l'angle dont la figure a tourné, il s'ensuit que, pour en avoir la mesure, il faudra prendre l'arc décrit par le centre de gravité, au lieu de la circonférence entière.

Extension de ce théorème. — Si une surface plane tourne successivement autour de plusieurs axes, le volume engendré s'obtiendra en multipliant son aire par la somme des arcs parcourus par son centre de gravité. Cette proposition, étant indépendante de la distance des axes, a lieu encore quand ils se succèdent à des distances infiniment petites, pourvu qu'ils soient toujours dans le plan de la surface mobile; et, dans ce cas, deux axes consécutifs peuvent être parallèles ou se rencontrer.

Par exemple, si l'on suppose une courbe plane, et que la surface génératrice se meuve de manière que son plan soit toujours normal à cette courbe et soit toujours percé par elle au même point, et que tous les points n'aient que des mouvements parallèles au plan de la courbe directrice, on

peut regarder un pareil mouvement comme produit par le développement du plan de l'aire génératrice, qui serait enroulé sur le cylindre qui aurait pour base la développée de la directrice : il est la limite du mouvement qui aurait lieu autour d'axes perpendiculaires au plan de la directrice, et qui tendraient indéfiniment vers les arêtes du cylindre en question.

Si, pour plus de généralité, on considère une courbe à double courbure décrite par un point constant du plan de la surface génératrice, auquel elle soit encore constamment normale, et que l'on prenne pour axes successifs les perpendiculaires aux plans osculateurs menés par les centres de courbure de la directrice, on pourra encore appliquer la même proposition ; car, quoique ces axes successifs ne se coupent réellement pas, on peut, en ne considérant que les limites, négliger l'erreur qui en résulterait, parce que leur distance est une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur au premier.

On peut se représenter ce mouvement, en supposant que le plan de la surface génératrice soit enroulé sur la surface polaire de la directrice, qui est le lieu des axes autour desquels s'exécutent les mouvements successifs. Si l'on déroule ensuite ce plan sans glissement, il sera constamment normal à la directrice, et sera toujours rencontré par elle au même point. Par cette suite de rotations infiniment petites, la surface donnée engendrera un volume égal au produit de son aire par la courbe décrite par son centre de gravité. Pour que ce théorème ne subisse aucune modification, il faut supposer que la surface génératrice ne vienne jamais couper les axes de rotation successifs.

ÉQUILIBRE D'UN FIL PESANT.

127. Nous avons donné précédemment les équations d'équilibre d'un fil sollicité en tous ses points par des forces

quelconques; le calcul en est très-simple dans le cas ou toutes ces forces sont produites par la pesanteur.

D'abord puisqu'elles sont toutes parallèles, tous les points du fil seront dans un plan parallèle aux forces, et par conséquent vertical. Il suffira donc de prendre deux axes de coordonnées dans ce plan.

1° Supposons en premier lieu le fil homogène; désignons par ε le poids de l'unité de longueur; prenons l'axe des x horizontal, et l'axe des y vertical dans le sens contraire à la pesanteur; on aura

$$X = 0, \quad Y = -\varepsilon,$$

et les équations générales se réduiront à

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - \varepsilon ds = 0,$$

et l'on en déduit immédiatement

$$T\frac{dx}{ds} = c, \quad T\frac{dy}{ds} = \varepsilon s + c', \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon s}{c} + \frac{c'}{c}.$$

La première montre que la composante horizontale de la tension est constante.

La dernière s'intégrera facilement en commençant par la différentier pour éliminer s. Les calculs n'offriront aucune difficulté, et nous nous dispenserons de les effectuer. Ils introduiront quatre constantes indéterminées dont il faudra trouver les valeurs d'après les données nécessaires de la question. Ces données seront les positions des deux points extrêmes, la longueur du fil et le point à partir duquel on compte les arcs s. Nous renvoyons pour ces détails aux Traités élémentaires.

La courbe qu'affecte le fil en équilibre, et qu'on nomme *chatnette*, jouit de propriétés très-curieuses, pour lesquelles nous renvoyons aux mêmes Traités.

Supposons maintenant que le poids ne soit pas propor-

tionnel à la longueur du fil, mais à sa projection horizontale, ce qui est à peu près le cas des ponts suspendus.

Appelant ε le poids du fil pour une projection égale à l'unité, les équations d'équilibre seront

$$d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) - \varepsilon dx = 0.$$

La composante horizontale de la tension sera encore constante, et la courbe du fil en équilibre sera une parabole.

Dans les ponts suspendus les forces ne sont pas réparties sur toute l'étendue de la chaîne, mais sont appliquées à un nombre fini de points dont les projections horizontales sont équidistantes. En faisant abstraction du poids de la chaîne, qui est très-petit par rapport à celui qu'elle soutient, on trouve que les sommets du polygone qu'elle forme quand l'équilibre est établi, sont situés sur une même parabole.

CHAPITRE IX.

APPLICATION DE LA COMPOSITION DES FORCES CONCOURANTES A L'ATTRACTION DES CORPS.

128 Des phénomènes qui se produisent journellement à la surface de la terre, ont montré que, dans certaines circonstances, il s'établit entre des corps une force qui tend à les rapprocher ou à les éloigner les uns des autres. Les changements de position relative des corps célestes ont conduit, comme nous le verrons plus tard, à admettre une tendance mutuelle de toutes les parties de la matière les unes vers les autres, cette force attractive, entre deux molécules infiniment petites, est dirigée suivant la droite qui les joint et égale pour les deux; de sorte que si cette droite devenait rigide, il y aurait équilibre entre les deux forces.

Sans entrer dans aucun détail à cet égard, on comprendra l'intérêt qu'il peut y avoir à calculer les résultantes des attractions ou répulsions exercées par des corps continus les uns sur les autres, quand on connaît la loi de cette attraction entre deux molécules infiniment petites dans tous les sens, d'après leur nature et leur distance.

Comme nous n'avons pas ici pour objet de faire connaître toutes les propositions relatives à l'attraction, qui pourront être utiles plus tard dans l'étude des phénomènes célestes, mais seulement de donner une application intéressante de la composition des forces concourantes, nous nous bornerons au calcul de la résultante des attractions

exercées par tous les points d'un corps continu de forme quelconque, sur un point matériel dont la position est donnée.

Nous supposerons qu'une même particule du corps exerce une attraction variable, non-seulement avec la distance au point attiré, mais encore avec la position de cette particule dans le corps. Désignons par r cette distance, par $F(r)$ la fonction de cette distance, à laquelle l'action est proportionnelle, et par ρ une fonction des coordonnées d'un point quelconque de la particule, à laquelle cette action est encore proportionnelle, et qui dépend de la qualité de la matière qui compose le corps en chaque point. Cette fonction ρ doit être conçue comme nous l'avons expliqué pour le poids spécifique en chaque point d'un corps non homogène. Elle peut représenter le poids spécifique, ou une quantité qui lui soit proportionnelle, ou toute autre; elle se rapporte à l'unité de volume, et doit être par conséquent multipliée par le volume de la particule, pour exprimer l'action de cette dernière. De même la molécule attirée peut être une particule d'un autre corps, pour lequel la fonction analogue aurait la valeur ρ', au point où se trouve cette particule; de sorte que l'action mutuelle de deux particules sera exprimée par

$$\rho\rho' F(r) dv dv',$$

dv et dv' étant les volumes des deux particules.

Nous représenterons par μ le produit constant $\rho' dv'$, par x, y, z les coordonnées d'un point de l'élément dv, par α, 6, γ celles d'un point de l'élément dv', l'action du premier sur le second sera dirigée suivant la droite qui les joindra, et aura pour expression

$$\mu\rho F(r) dx dy dz.$$

Les composantes de cette action parallèlement aux trois

axes rectangulaires, seront

$$\mu p \frac{x-\alpha}{r} F(r)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\mu p \frac{y-6}{r} F(r)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\mu p \frac{z-\gamma}{r} F(r)\,dx\,dy\,dz,$$

et il est essentiel de remarquer que ces expressions sont générales, et que leurs signes indiquent le sens de ces composantes. Elles sont positives lorsque les composantes sont dirigées dans le sens des axes positifs, et négatives dans le cas contraire; la somme algébrique des expressions qui se rapportent à un même axe, étendue au corps entier, donnera donc par sa valeur et son signe la grandeur et le sens de la composante, parallèlement à cet axe, de l'action du corps entier sur le point donné. Si donc nous désignons par X, Y, Z les trois composantes de cette action totale, nous aurons, en prenant les intégrales dans toute l'étendue du corps,

$$X = \mu \int\int\int \rho \left(\frac{x-\alpha}{r}\right) F(r)\,dx\,dy\,dz,$$

$$Y = \mu \int\int\int \rho \left(\frac{y-6}{r}\right) F(r)\,dx\,dy\,dz,$$

$$Z = \mu \int\int\int \rho \left(\frac{z-\gamma}{r}\right) F(r)\,dx\,dy\,dz,$$

et l'on aura

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-6)^2 + (z-\gamma)^2} = r.$$

Il suffirait de les changer de signe pour passer au cas de la répulsion.

Ces intégrales, qui s'étendent au volume entier du corps, peuvent se réduire à une seule. En effet, en différentiant

partiellement r par rapport à α, 6, γ, on obtient

$$\frac{dr}{d\alpha}=-\frac{(x-\alpha)}{r},\quad \frac{dr}{d6}=-\frac{(y-6)}{r},\quad \frac{dr}{d\gamma}=-\frac{(z-\gamma)}{r}.$$

Soit maintenant $\varphi(r)$ une fonction dont la dérivée, par rapport à r, soit $F(r)$; posons

$$\iiint\rho\varphi(r)\,dx\,dy\,dz=\mathrm{U},$$

et différentions les deux membres de cette équation par rapport à α, 6, γ; il suffira de différentier sous le signe $\int$, si $\varphi(r)$ ne passe pas par l'infini, et l'on trouvera ainsi les formules suivantes :

$$\mathrm{X}=-\mu\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha},\quad \mathrm{Y}=-\mu\frac{d\mathrm{U}}{d6},\quad \mathrm{Z}=-\mu\frac{d\mathrm{U}}{d\gamma}.$$

Tout dépend donc de la seule intégrale U.

Il est bon de remarquer que si, dans le cas, par exemple, d'un solide indéfini, l'intégrale U prenait une valeur infinie, mais que les dérivées partielles désignées par $\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha}$, $\frac{d\mathrm{U}}{d6}$, $\frac{d\mathrm{U}}{d\gamma}$ fussent finies, les valeurs précédentes de X, Y, Z, n'en seraient pas moins exactes. En effet, prenons d'abord une portion finie du solide, les composantes de son attraction auront pour valeurs les produits de $-\mu$ par les dérivées partielles de la fonction finie U. Supposons maintenant que l'on étende indéfiniment la partie considérée du solide, les composantes de l'action seront toujours

$$-\mu\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha},\quad -\mu\frac{d\mathrm{U}}{d6},\quad -\mu\frac{d\mathrm{U}}{d\gamma},$$

que U croisse ou non sans limite. Donc, si ces trois expressions ont des limites, ce sont les composantes de l'attrac-

tion du solide indéfini. Et, si elles croissent indéfiniment, on en conclura que l'attraction croît sans limite à mesure que l'on considère une plus grande partie du corps; c'est ce que l'on exprime en disant que l'attraction du solide est infinie.

Ainsi, il suffira toujours de connaître les dérivés qui entrent dans l'expression des composantes X, Y, Z, sans s'inquiéter si la fonction U elle-même est finie ou infinie. On raisonnerait d'une manière analogue si U était infini, sans que le solide le fût.

129. Dans le cas où l'attraction est en raison inverse du carré de la distance,

$$\mathrm{F}(r)=\frac{f}{r^2},\quad \varphi(r)=-\frac{f}{r},$$

et faisant, dans ce cas,

$$\int\int\int \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r}=\mathrm{V},$$

on aura

$$\mathrm{X}=\mu f\frac{d\mathrm{V}}{da},\quad \mathrm{Y}=\mu f\frac{d\mathrm{V}}{db},\quad \mathrm{Z}=\mu f\frac{d\mathrm{V}}{dc}.$$

Si le point attiré fait partie du corps, la fonction $\varphi(r)$ passe par l'infini; mais ces formules subsistent toujours. En effet, elles n'offrent aucune difficulté, si on les applique à tout le corps, moins une sphère infiniment petite qui renferme le point attiré. Or V a une limite, quand cette sphère tend vers zéro; car l'élément de volume exprimé en coordonnées polaires ayant pour origine le point attiré a pour expression $r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\psi$; or, si l'on divise par r, et qu'on intègre dans l'étendue de la sphère de rayon infiniment petit, on aura une quantité infiniment petite du second ordre. Il suit de là que la fonction V, étendue au corps entier, est finie, et, par suite, ses dérivées par rap-

port aux indéterminées α, β, γ le sont aussi. On voit de même que X, Y, Z ont aussi des limites; d'ailleurs, quand les deux membres d'une équation ont des limites, ces limites sont égales : donc les formules qui donnent X, Y, Z sont encore exactes quand on considère le corps entier dont le point fait partie.

130. L'attraction sur le point (α, β, γ), estimée suivant la direction du rayon vecteur r mené de l'origine à ce point, a pour expression

$$X\frac{\alpha}{r} + Y\frac{\beta}{r} + Z\frac{\gamma}{r} = -\mu\left(\frac{dU}{d\alpha}\frac{\alpha}{r} + \frac{dU}{d\beta}\frac{\beta}{r} + \frac{dU}{d\gamma}\frac{\gamma}{r}\right).$$

Mais en considérant U comme fonction de α, β, γ, et ces coordonnées comme fonction de r et de deux angles θ, ψ, on a

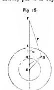
$$\frac{dU}{dr} = \frac{dU}{d\alpha}\frac{\alpha}{r} + \frac{dU}{d\beta}\frac{\beta}{r} + \frac{dU}{d\gamma}\frac{\gamma}{r},$$

en observant que les dérivées partielles de α, β, γ par rapport à r sont respectivement $\frac{\alpha}{r}$, $\frac{\beta}{r}$, $\frac{\gamma}{r}$.

Donc la composante de l'attraction suivant le rayon vecteur est $-\mu\frac{dU}{dr}$, les deux autres composantes étant supposées dans le plan perpendiculaire à ce rayon. Dans le cas de $F(r) = \frac{f}{r^2}$, cette expression devient $\mu f\frac{dV}{dr}$.

Application à la sphère. — Pour donner une application de ces formules dans le cas de $F(r) = \frac{f}{r^2}$, considérons une sphère creuse pour laquelle ρ soit une fonction quelconque de la distance au centre. Prenons pour axe des x la droite qui joint le centre O au point attiré P, et qui est évidemment la direction de la résultante des attractions.

Désignons par a et A (*fig.* 16) les rayons des deux surfaces qui terminent le solide, par u le rayon intérieur d'une



couche sphérique ayant pour épaisseur du, et par θ l'angle d'un rayon quelconque ON, égal à u, avec l'axe des x, OP.

La valeur de V aura pour expression

$$V = 2\pi \int\int \frac{\rho u^2 \, du \sin\theta \, d\theta}{r}$$

L'intégration par rapport à θ étant effectuée entre o et π, donnera la partie de V correspondante à la couche dont l'épaissenr est du; en intégrant ensuite le résultat par rapport à u entre les limites a et A, on aura la valeur totale de V. Or on a

$$r^2 = u^2 - 2\alpha u \cos\theta + \alpha^2,$$

d'où, en observant que u est constant,

$$r\,dr = \alpha u \sin\theta \, d\theta,$$

et, par suite,

$$V = \frac{2\pi}{\alpha} \int\int \rho u \, du \, dr.$$

Quant aux limites de r correspondantes à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$,

il faut distinguer le cas où le point attiré est extérieur au solide, de celui où il est intérieur.

1° Si le point attiré est extérieur au solide, on aura $\alpha > A$, et, par conséquent, $\alpha > u$ pour toutes les couches que l'on a à considérer. On a alors

$$\int dr = 2u \quad \text{et} \quad V = \frac{4\pi}{\alpha}\int_a^A \rho u^2 du.$$

Si l'on pose

$$4\pi\int_a^A \rho u^2 du = M,$$

on aura

$$V = \frac{M}{\alpha}, \quad \text{et} \quad X = -\frac{\mu f M}{\alpha^2}.$$

L'attraction est donc la même que si toute la matière du corps était réunie à son centre.

2° Si le point attiré est dans l'intérieur de la plus petite surface, on a $\alpha < a$, et, par conséquent, $\alpha < u$ dans toute l'étendue des valeurs de u. On a donc alors

$$\int dr = 2\alpha \quad \text{et} \quad V = 4\pi \int \rho u du.$$

Cette quantité étant indépendante de α, on aura

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0, \quad \text{et, par suite,} \quad X = 0.$$

On voit donc que, *dans cette même loi d'attraction, le solide n'exercera aucune attraction sur un point situé dans l'intérieur de sa plus petite surface.*

On conclut de là que l'action sur un point qui ferait partie du même solide, se réduirait à celle qu'exercerait la partie comprise entre la sphère de rayon α et celle qui passerait par le point attiré. Il faudrait donc supposer la

matière qui compose cette partie, réunie au centre, et agissant sur le point, suivant la loi donnée.

S'il s'agit, par exemple, de l'action d'une sphère pleine, homogène, sur un point de son intérieur, situé à une distance x du centre, on devra prendre $M = \frac{4}{3}\pi\rho x^3$; et l'attraction a pour valeur $\frac{4}{3}\pi\rho f\mu x$. *Elle est donc directement proportionnelle à la distance au centre.*

ACTION D'UNE COUCHE ELLIPTIQUE SUR UN POINT INTÉRIEUR.

131. La proposition que nous avons démontrée relativement à l'action d'une couche sphérique sur un point intérieur, peut se démontrer géométriquement dans le cas plus général du solide compris entre deux ellipsoïdes semblables, ayant leurs axes coïncidents.

En effet, supposons d'abord le solide homogène; soit M (*fig.* 17) le point attiré. Considérons-le comme

Fig. 17.

sommet d'une infinité d'angles solides, qui composent tout l'espace autour de lui, et cherchons la résultante de l'action des deux parties comprises dans un quelconque de ces angles et son opposé au sommet. Soit DCAB une des arêtes de cet angle; on aura AB = CD, par la similitude des deux ellipsoïdes. Si nous désignons par ω la

mesure de l'angle solide, nous pourrons décomposer le solide AB en éléments dont les épaisseurs PQ formeront la droite AB, et dont l'expression sera $\omega r^2 dr$; multipliant par $\frac{\rho f \mu}{r^2}$, on aura l'attraction que cet élément exerce sur le point M, on trouve ainsi $\rho f \mu \omega dr$, et la somme $\rho f \mu \omega.AB$ exprimera l'attraction de la matière contenue dans AB. On trouvera de même $\rho f \mu \omega.CD$ pour l'attraction de la matière contenue dans la partie CD, et comme les droites AB et CD sont égales, ces attractions seront égales, et, par conséquent, se détruiront. Donc, comme il en sera ainsi pour tous les angles solides autour de M, *le solide homogène compris entre deux ellipsoïdes semblables quelconques, n'exerce aucune attraction sur un point situé dans l'intérieur de sa plus petite surface.*

Cette proposition, étant indépendante de l'épaisseur, a lieu aussi pour une couche infiniment mince. Donc *elle est encore vraie pour un solide d'une épaisseur quelconque, composé de couches homogènes comprises entre des ellipsoïdes semblables, et dont la nature varie d'une manière quelconque de l'une à l'autre.*

132 *Surfaces de niveau.* — On appelle ainsi celles sur lesquelles un point matériel posé resterait en équilibre sous l'influence des forces du système.

Considérons donc un corps quelconque qui attire un point suivant une loi quelconque; on aura, d'après ce qui précède,

$$X = -\mu\frac{dU}{dx},\quad Y = -\mu\frac{dU}{d6},\quad Z = -\mu\frac{dU}{d\gamma};$$

pour que la résultante soit perpendiculaire à la surface sur laquelle le point peut se mouvoir, il faut qu'on ait pour tous les déplacements sur cette surface,

$$X dx + Y d6 + Z d\gamma = 0,$$

ou

$$\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{d6}d6 + \frac{dU}{d\gamma}d\gamma = 0,$$

ce qui prouve que U est constant. L'équation des surfaces de niveau relatives à l'attraction ou à la répulsion du corps, est donc

$$U = c,$$

c désignant une constante arbitraire.

Quand l'attraction est en raison inverse du carré de la distance, cette équation devient $V = c$.

133 La fonction V jouit d'une propriété remarquable, qui est d'une grande utilité pour la détermination de sa valeur.

D'après la valeur de r, on a

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dx} = \frac{x-a}{r^3}, \quad \frac{d\frac{1}{r}}{d6} = \frac{y-6}{r^3}, \quad \frac{d\frac{1}{r}}{d\gamma} = \frac{z-\gamma}{r^3},$$

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{da^2} = \frac{3(x-a)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}, \quad \frac{d^2\frac{1}{r}}{d6^2} = \frac{3(y-6)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\gamma^2} = \frac{3(z-\gamma)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3};$$

d'où l'on conclut

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{da^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d6^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\gamma^2} = 0.$$

Mais, puisque l'on a $V = \int\int\int \frac{\varrho dv}{r}$, dv étant l'élément de volume, et que, pour différentier une intégrale par rapport à des quantités considérées comme constantes dans

l'intégration, et qui n'entrent pas dans les limites de cette intégrale, il suffit de différentier sous le signe $\int$, on aura

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = \iiint \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\alpha^2}\rho dv,$$

$$\frac{d^2V}{d6^2} = \iiint \frac{d^2\frac{1}{r}}{d6^2}\rho dv,$$

$$\frac{d^2V}{d\gamma^2} = \iiint \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\gamma^2}\rho dv,$$

pourvu, toutefois, que la fonction $\frac{1}{r}$ ne devienne infinie pour aucune valeur comprise dans les limites de l'intégration; car on sait que, dans ce cas, la différentiation sous le signe $\int$ peut donner des résultats inexacts.

Donc, si le point $(\alpha, 6, \gamma)$ ne fait pas partie du corps attirant, on aura

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d6^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2} = 0.$$

Si le point fait partie du corps, on concevra une sphère infiniment petite, dans l'intérieur de laquelle il sera compris; la fonction V, considérée pour tout le reste du corps, satisfera à l'équation ci-dessus.

La valeur de ρ au point attiré sera aussi celle de la petite sphère. Les composantes de l'attraction de la sphère sur ce point, qui est dans son intérieur, seront donc respectivement

$$-\frac{4}{3}\pi\mu f\rho(\alpha - a), \quad -\frac{4}{3}\pi\mu f\rho(6 - b), \quad -\frac{4}{3}\pi\mu f\rho(\gamma - c),$$

a, b, c étant les coordonnées du centre de la petite sphère; on aura donc, en appelant V' la partie de V qui se rapporte à cette sphère,

$$\frac{dV'}{d\alpha} = -\frac{4}{3}\pi\rho(\alpha - a),$$

$$\frac{dV'}{d6} = -\frac{4}{3}\pi\rho(6 - b),$$

$$\frac{dV'}{d\gamma} = -\frac{4}{3}\pi\rho(\gamma - c);$$

d'où

$$\frac{d^2V'}{d\alpha^2} + \frac{d^2V'}{d6^2} + \frac{d^2V'}{d\gamma^2} = -4\pi\rho;$$

et, par conséquent,

$$(2) \qquad \frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d6^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2} = -4\pi\rho,$$

la valeur de ρ se rapportant au point attiré.

Nous allons montrer, par quelques exemples très simples, comment les équations (1) et (2) peuvent servir à déterminer la fonction V dont se déduisent les trois composantes de l'attraction.

134. *Application à la sphère.* — La sphère étant supposée formée de couches homogènes, V sera fonction de la distance r du centre de la sphère au point attiré; la résultante de l'attraction sera dirigée suivant la droite qui joint ces deux points, et représentée par $\mu f\frac{dV}{dr}$.

L'équation $r^2 = \alpha^2 + 6^2 + \gamma^2$ donnera

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{\alpha}{r}, \quad \frac{dr}{d6} = \frac{6}{r}, \quad \frac{dr}{d\gamma} = \frac{\gamma}{r},$$

et l'on aura, par suite,

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{r^2}\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{\alpha^2}{r^3}\frac{dV}{dr},$$

$$\frac{d^2V}{d\beta^2} = \frac{\beta^2}{r^2}\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{\beta^2}{r^3}\frac{dV}{dr},$$

$$\frac{d^2V}{d\gamma^2} = \frac{\gamma^2}{r^2}\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{\gamma^2}{r^3}\frac{dV}{dr};$$

et ajoutant ces trois dernières équations, on aura, en supposant d'abord le point hors de la sphère,

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0.$$

La fonction V dépend donc alors d'une équation qui ne renferme pas de différentielles partielles. En la multipliant par r^2, son premier membre devient la dérivée de $r^2\frac{dV}{dr}$. On aura donc, en désignant par c une constante arbitraire,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{c}{r^2}.$$

Supposons d'abord que la sphère soit creuse et que le point soit dans l'intérieur de la plus petite surface, dont nous désignerons le rayon par R_1. L'attraction devant évidemment être nulle pour $r = 0$, il faut qu'on ait

$$c = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{dV}{dr} = 0.$$

Donc les composantes de l'attraction sont toujours nulles, et le point est en équilibre, quelque position qu'il occupe dans la partie vide de la sphère.

Supposons, en second lieu, que le point fasse partie du

volume de la sphère, on a

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dV}{dr}=-4\pi\rho,$$

ρ étant une fonction donnée de r.

Multipliant par r^2 et intégrant à partir de R_1, il vient, en observant que $\frac{dV}{dr}$ étant nul pour tous les points de l'intérieur, l'est aussi à la limite R_1,

$$r^2\frac{dV}{dr}=-4\pi\int_{R_1}^{r}\rho r^2 dr.$$

Désignant $\int_{R_1}^{r}4\pi r^2\rho\,dr$ par M', on aura

$$\frac{dV}{dr}=-\frac{M'}{r^2}.$$

La valeur absolue de l'attraction sera donc $\frac{\mu f M'}{r^2}$, elle est le même que si l'on réunissait au centre tous les éléments de matière compris entre les sphères de rayons R_1 et r.

Si le point attiré est sur la surface extérieure ayant pour rayon R, on aura, en désignant par M la somme relative à tous les éléments de la sphère creuse,

$$\frac{dV}{dr}=-\frac{M}{R^2},$$

et l'attraction exercée sur le point aura pour expression

$$\frac{\mu f M}{R^2}.$$

Enfin, considérons un point extérieur à la surface, c'est-à-dire pour lequel on ait $r > R$, on aura, comme dans le premier cas,

$$\frac{dV}{dr}=\frac{c}{r^2};$$

mais, à cause de la discontinuité provenant de la figure du corps, la constante c n'est pas assujettie à avoir la même valeur que pour les points intérieurs. Pour la déterminer, on fera $r = R$, et l'on devra trouver, d'après le cas précédent,

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{M}{R^2}, \quad \text{donc} \quad c = -M,$$

et l'on aura pour tous les points extérieurs,

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{M}{r^2}.$$

L'attraction aura donc pour expression

$$\frac{M\mu f}{r^2},$$

et l'on en conclut ce théorème :

Une sphère creuse composée de couches concentriques homogènes, exerce sur les points extérieurs la même action que si toute sa matière était réunie à son centre.

135. *Application au cylindre indéfini.* — Considérons maintenant un cylindre creux indéfini, composé de couches homogènes dont la densité n'est fonction que de la distance à l'axe de ce cylindre, que nous prendrons pour axe des z; son action sur un point quelconque sera dirigée vers le point où l'axe est coupé par un plan perpendiculaire, mené par le point attiré. Nous prendrons ce point de l'axe pour origine, et nous désignerons par r sa distance au point attiré; l'attraction ne dépendra que de r, et son expression sera

$$\mu f \frac{dV}{dr}.$$

Or, pour les points qui ne font pas partie du cylindre, on aura, en observant que V est indépendant de γ,

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} = 0;$$

d'où

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = 0.$$

Multipliant par r, on a

$$d\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0,$$

d'où

$$\frac{dV}{dr} = \frac{c}{r},$$

c étant une constante arbitraire.

Mais remarquons, comme dans le cas d'une sphère creuse, que les points extérieurs et les points intérieurs à la couche cylindrique étant séparés par ceux de cette couche, pour lesquels les circonstances sont différentes, il n'y a pas continuité en passant des valeurs de r plus grandes que le rayon de la surface extérieure du cylindre, aux valeurs de r plus petites que le rayon de la surface intérieure.

Pour les points de l'intérieur de cette surface, la valeur de c est invariable; or elle est évidemment nulle pour $r = 0$; donc on a, pour tous les points de l'intérieur,

$$\frac{dV}{dr} = 0.$$

D'où l'on conclut qu'*un cylindre creux indéfini, composé de couches concentriques homogènes, n'exerce aucune action sur un point situé dans l'intérieur de sa surface interne*.

On démontrerait directement cette proposition de la même manière que pour l'ellipsoïde creux.

136. Cherchons maintenant la valeur de $\frac{dV}{dr}$ pour les

points appartenant au cylindre; pour ces points, on a

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = -4\pi\rho;$$

et l'on trouve par l'intégration, en désignant par R_1 le rayon de la surface intérieure,

$$r\frac{dV}{dr} = -4\pi\int_{R_1}^{r} \rho r\, dr.$$

Il n'y a pas de constante à ajouter, parce que $\frac{dV}{dr}$ est nul pour $r = R_1$, puisqu'il l'est pour tous les points de l'intérieur de la surface dont le rayon est R_1. En faisant $r = R$, on obtient

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi}{R}\int_{R_1}^{R} \rho r\, dr.$$

Pour les points extérieurs on doit avoir

$$\frac{dV}{dr} = \frac{C}{R}.$$

Faisant $r = R$, on trouve, en vertu de l'équation précédente,

$$C = -4\pi\int_{R_1}^{R} \rho r\, dr.$$

La constante étant ainsi déterminée, on aura pour toutes les valeurs de r plus grandes que R,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{C}{r},$$

et l'attraction du cylindre aura pour expression

$$\frac{\mu f C}{r}.$$

On voit qu'elle varie en raison inverse de la distance du point à l'axe du cylindre.

CHAPITRE X.

ATTRACTION DES ELLIPSOÏDES.

137. Cette question est d'une si grande importance et a été l'objet des efforts de tant de géomètres éminents, que nous croyons devoir l'exposer avec quelque détail, et bien montrer la suite des progrès qui en ont amené la solution au degré de simplicité auquel elle est parvenue.

Nous commencerons par calculer l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point matériel situé à sa surface.

Attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point de sa surface, l'attraction étant en raison inverse du carré de la distance.

Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ l'équation de l'ellipsoïde; α, 6, γ les coordonnées du point attiré M (*fig.* 18), on aura

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{6^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=1.$$

Fig. 18.

Passons à un système de coordonnées polaires au moyen

des formules

$$x = \alpha + r\cos\xi,\quad y = \beta + r\cos\eta,\quad z = \gamma + r\cos\zeta,$$

l'equation de l'ellipsoïde deviendra

$$r = -2\,\frac{\frac{\alpha}{a^2}\cos\xi + \frac{\beta}{b^2}\cos\eta + \frac{\gamma}{c^2}\cos\zeta}{\frac{1}{a^2}\cos^2\xi + \frac{1}{b^2}\cos^2\eta + \frac{1}{c^2}\cos^2\zeta}.$$

Considérant un angle solide $d\omega$ ayant son sommet au point M, et calculant l'action de la pyramide comprise dans cet angle, sur la matière de l'unité de volume concentrée au point M, on aura

$$f\int \frac{r^2\,d\omega\,dr}{r^2} \quad \text{ou} \quad fr\,d\omega,$$

r ayant la valeur ci-dessus pour les valeurs de ξ, η, ζ relatives à Mm, et f désignant l'attraction de la matière de l'unité de volume sur une égale quantité, concentrées chacune en un seul point, et placées à une distance égale à l'unité.

En décomposant cette force $fr\,d\omega$ parallèlement aux axes, on aura

$$fr\,d\omega\cos\xi,\quad fr\,d\omega\cos\eta,\quad fr\,d\omega\cos\zeta.$$

Il ne reste plus qu'à faire la somme de ces expressions lorsque le rayon Mm prendra toutes les directions, du côté du plan tangent, où se trouve l'ellipsoïde. Or, comme on n'aura que des produits de deux cosinus, les directions contraires donneraient les mêmes valeurs, et on pourra faire les sommes pour toutes les directions autour de M, puis en prendre la moitié.

Le numérateur de chacune des composantes à intégrer renfermera trois termes, dont l'un contiendra le carré d'un cosinus, et les deux autres des produits de cosinus diffé-

rents; quant au dénominateur, il ne contient que des carrés de cosinus. Il est donc facile de voir que les éléments des sommes qui ne correspondent pas aux termes renfermant les carrés se détruisent deux à deux; de sorte que les composantes X, Y, Z de l'action totale de l'ellipsoïde sur le point M ont pour expressions, en représentant le dénominateur commun par p,

$$X = -\frac{f\alpha}{a^2}\sum\frac{\cos^2\xi\, d\omega}{p},$$

$$Y = -\frac{f6}{b^2}\sum\frac{\cos^2\eta\, d\omega}{p},$$

$$Z = -\frac{f\gamma}{c^2}\sum\frac{\cos^2\zeta\, d\omega}{p}.$$

Pour effectuer ces calculs, il faudrait d'abord exprimer un des trois cosinus au moyen des deux autres; mais alors la symétrie qui avait eu lieu jusque-là disparaîtrait; il sera préférable d'employer les deux angles que l'on choisit ordinairement, et il suffira de remplacer $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ par les valeurs suivantes

$$\cos\xi = \cos\theta, \quad \cos\eta = \sin\theta\cos\psi, \quad \cos\zeta = \sin\theta\sin\psi,$$

θ désignant l'angle du rayon vecteur avec l'axe des x, et ψ l'angle que sa projection sur yz fait avec l'axe des y.

Nous calculerons d'abord la valeur de X: celles de Y et de Z s'en déduiront par de simples changements de lettres.

Dans ce nouveau système de variables, l'élément $d\omega$ de la surface sphérique de rayon 1 aura l'expression suivante:

$$d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

et l'on aura

$$X = -\frac{f\alpha}{a^2}\int\int\frac{\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\, d\psi}{\frac{1}{a^2}\cos^2\theta + \frac{1}{b^2}\sin^2\theta\cos^2\psi + \frac{1}{c^2}\sin^2\theta\sin^2\psi}.$$

L'intégrale par rapport à ψ devra être prise entre o et 2π, et ensuite celle de θ, entre o et π. Mais il est évident, d'après la forme de l'expression, qu'il suffira d'intégrer par rapport à ψ entre o et $\frac{\pi}{2}$, puis de quadrupler le résultat; et qu'ensuite on pourra se borner à considérer les valeurs de θ de o à $\frac{\pi}{2}$, puis à doubler le résultat. La première intégration n'offre aucune difficulté : on posera

$$\operatorname{tang}\psi = v,$$

d'où

$$\sin^2\psi = \frac{v^2}{1+v^2}, \quad \cos^2\psi = \frac{1}{1+v^2}, \quad d\psi = \frac{dv}{1+v^2},$$

et l'on aura

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{P} &= a^3 b^3 c^3 \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{dv}{c^2(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta) + b^2(a^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta)v^2} \\ &= a^3 bc \frac{\pi}{2\sqrt{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)(a^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta)}}.\end{aligned}$$

Multipliant, comme nous l'avons dit, par 4, puis par 2, on aura

$$X = -4\pi f bc\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)(a^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta)}}.$$

Si pour calculer Y on prenait un système de coordonnées polaires analogues, où θ désignerait l'angle du rayon vecteur avec l'axe des y, et ψ l'angle que fait avec l'axe des z sa projection sur xz, l'expression de Y ne différerait de

celle de X que par le changement de α en 6 et des lettres a, b, c les unes dans les autres par le procédé ordinaire de rotation.

On trouvera ainsi

$$\mathrm{Y} = -4\pi f c a 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\theta \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{(b^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta)(b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)}},$$

et de même

$$\mathrm{Z} = -4\pi f a b \gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\theta \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{(c^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)(c^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)}}.$$

Pour donner une forme plus simple à ces trois expressions, nous poserons $\cos\theta = u$ d'où résultera

$$\mathrm{X} = 4\pi f \frac{bc}{a^2} \alpha \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{\left(1 + \frac{b^2 - a^2}{a^2} u^2\right)\left(1 + \frac{c^2 - a^2}{a^2} u^2\right)}},$$

$$\mathrm{Y} = 4\pi f \frac{ac}{b^2} 6 \int_1^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{\left(1 + \frac{c^2 - b^2}{b^2} u^2\right)\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} u^2\right)}},$$

$$\mathrm{Z} = 4\pi f \frac{ba}{c^2} \gamma \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{\left(1 + \frac{a^2 - c^2}{c^2} u^2\right)\left(1 + \frac{b^2 - c^2}{c^2} u^2\right)}},$$

et quelles que soient les grandeurs relatives de a, b, c, les facteurs sous les radicaux seront positifs, et les intégrations n'offriront aucune circonstance particulière, dans les limites où elles doivent être effectuées; mais on ne pourra obtenir leurs valeurs sous forme finie, à moins que deux des trois axes de l'ellipsoïde ne soient égaux, auquel cas cela devient très-facile, comme nous allons le voir.

Si l'on pose $\frac{b^2-a^2}{a^2}=\lambda^2$, $\frac{c^2-a^2}{a^2}=\lambda'^2$, on peut, au moyen de certaines transformations, donner à Y et à Z une forme telle, que leur détermination se ramènerait à celle de X par de simples différentiations par rapport aux paramètres λ, λ'. Mais, comme on ne peut avoir l'expression générale de X sous forme finie, cette réduction, pour laquelle nous renvoyons aux Traités spéciaux, ne pourrait être appliquée que dans les cas particuliers que nous allons traiter directement.

138. 1° *Ellipsoïde aplati.* — Soit a le petit axe et $b=c$, on aura, en posant $\frac{b^2-a^2}{a^2}=\lambda^2$, ou $b^2=a^2(1+\lambda^2)$,

$$X=\frac{4\pi f b^2}{a^2}\alpha\int_0^1\frac{u^2du}{1+\lambda^2u^2},$$

$$Y=\frac{4\pi f a}{b}\,6\int_0^1\frac{u^2du}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2a^2}{b^2}u^2}},$$

$$Z=\frac{4\pi f a}{b}\gamma\int_0^1\frac{u^2du}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2a^2}{b^2}u^2}};$$

d'où

$$X=\frac{4\pi f b^2}{a^2\lambda^2}\alpha\left(1-\frac{\operatorname{arc\,tang}\lambda}{\lambda}\right),$$

$$Y=\frac{4\pi f b^2}{a^2\lambda^2}\,6\left(\operatorname{arc\,tang}\lambda-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right),$$

$$Z=\frac{4\pi f b^2}{a^2\lambda^2}\gamma\left(\operatorname{arc\,tang}\lambda-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

2° *Ellipsoïde allongé.* — Soit a le grand axe et $b=c$,

on aura, en posant $\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \lambda^2$, ou $a^2 = b^2(1 + \lambda^2)$,

$$X = \frac{4\pi f b^2}{a^2} \alpha \int_0^1 \frac{u^2 du}{1 - \frac{\lambda^2 b^2 u^2}{a^2}},$$

$$Y = \frac{4\pi f a}{b} \beta \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1 + \lambda^2 u^2}},$$

$$Z = \frac{4\pi f a}{b} \gamma \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1 + \lambda^2 u^2}};$$

effectuant,

$$X = \frac{4\pi f a}{b\lambda^3} \alpha \left[l(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}) - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \right],$$

$$Y = \frac{2\pi f a}{b\lambda^3} \beta \left[\lambda\sqrt{1 + \lambda^2} - l(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}) \right];$$

$$Z = \frac{2\pi f a}{b\lambda^3} \gamma \left[\lambda\sqrt{1 + \lambda^2} - l(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}) \right].$$

139. *Action d'un ellipsoïde sur un point intérieur.* — Si l'on fait passer par le point intérieur une surface ellipsoïdale semblable à celle qui termine le solide, la partie comprise entre ces deux surfaces n'exercera aucune action sur le point, et il n'y aura à calculer que l'action exercée par le solide intérieur à la nouvelle surface dont l'équation sera $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = m^2$, m^2 ayant pour valeur $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}$.

Les formules précédentes donneront les composantes de l'action cherchée, en y remplaçant a, b, c par ma, mb, mc. Mais comme elles ne dépendent que des rapports des axes, cette substitution serait inutile, et on peut y laisser a, b, c. Elles s'appliqueront ainsi à tous les points intérieurs α, β, γ. Les composantes d'un ellipsoïde plein sur tous les points de son intérieur sont donc proportionnelles aux coordonnées respectivement parallèles de ces points.

CHAPITRE XI.

DIGRESSION SUR UNE TRANSFORMATION DE LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

140. La méthode du changement de variables est d'une grande utilité, soit dans la science des nombres, soit dans ses applications à la géométrie. Dans ces dernières, on a le plus souvent pour objet de déterminer les mêmes lieux par des variables différentes; mais quelquefois aussi on change la forme des lieux, ou la position des points, et Newton en a donné le premier un remarquable exemple.

Le changement de variables dont nous allons parler est de ce genre. Les coordonnées d'un point étant données, les nouvelles variables correspondantes sont, non les coordonnées du même point par rapport à d'autres axes, mais celles d'un point différent par rapport aux mêmes axes; et la liaison de ces variables consiste en ce que les rapports des coordonnées parallèles au même axe sont constants, mais différents pour les trois axes. On donne particulièrement le nom de *points correspondants* aux deux points quelconques qui sont ainsi déterminés l'un par l'autre.

Tout point peut être considéré comme appartenant au premier système, et l'on obtiendra le correspondant en multipliant les coordonnées du premier par les rapports donnés. Réciproquement, on obtiendrait les coordonnées du premier en divisant par ces mêmes rapports celles du correspondant dans le second système. Il faudra donc, lorsqu'on voudra trouver le correspondant d'un point, indiquer avec soin de quel système il fait partie et ne pas confondre les deux rapports inverses.

Nous allons traiter quelques questions simples, relatives à ce mode de transformation, et qui nous seront utiles dans la théorie de l'attraction.

141. *Équation de la surface correspondante d'une surface donnée.*

Soient $F(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface; m, n, p les nombres constants par lesquels il faut multiplier l'x, l'y et le z d'un quelconque de ses points pour obtenir les coordonnées X, Y, Z du point correspondant, on aura

$$X = mx,\quad Y = ny,\quad Z = pz;$$

d'où résultera entre X, Y, Z, l'équation

$$F\left(\frac{X}{m}, \frac{Y}{n}, \frac{Z}{p}\right) = 0,$$

qui sera celle de la surface correspondante de la première.

Si $m = n = p$, les deux surfaces seront semblables.

On voit que le degré de ces deux équations est le même. D'où il suit que *la surface correspondante d'un plan est un plan*, mais non parallèle en général. Si le premier est parallèle à l'un des plans coordonnés, le second le sera aussi. S'il est parallèle à l'un des axes, l'autre le sera au même axe. Si la surface proposée est un ellipsoïde rapporté à ses axes, la correspondante sera aussi un ellipsoïde rapporté à ses axes coïncidant en direction avec les premiers. Il en sera de même si la première surface est un hyperboloïde à une ou à deux nappes. Si, par exemple, on part de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

la surface correspondante aura pour équation

$$\frac{X}{m^2 a^2} + \frac{Y}{n^2 b^2} + \frac{Z}{p^2 c^2} = 1,$$

ce qui peut représenter un ellipsoïde quelconque, en donnant à m, n, p des valeurs convenables, qui seront toujours les rapports des axes correspondants des deux surfaces.

Cette même équation représentera tous les ellipsoïdes homofocaux au premier si l'on prend

$$m^2a^2 - a^2 = n^2b^2 - b^2 = p^2c^2 - c^2,$$

ce qui détermine deux des quantités m, n, p en fonction de la troisième, qui reste arbitraire.

Les correspondantes de deux surfaces semblables sont semblables. — Soient, en effet, les deux surfaces semblables

$$F(x, y, z) = 0, \quad F(kx, ky, kz) = 0,$$

les équations correspondantes seront

$$F\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{n}, \frac{z}{p}\right) = 0, \quad F\left(\frac{kx}{m}, \frac{ky}{n}, \frac{kz}{p}\right) = 0.$$

Ces surfaces sont donc semblables.

Lignes correspondantes. — Les lignes étant données par les équations de deux surfaces qui les contiennent, on fera, pour chacune de ces équations, ce que nous venons de faire pour une seule.

Il est important de remarquer que le lien correspondant d'une ligne droite est une ligne droite, non parallèle en général; car les deux surfaces sont des plans, et leurs correspondantes en seront par conséquent aussi.

Si la droite donnée est parallèle à l'un des plans ou des axes coordonnés, il en sera de même de la correspondante.

142. *Rapport des longueurs de deux droites correspondantes parallèles à l'un des axes.*

Si les points extrêmes de deux droites parallèles à un même axe sont correspondants, *les longueurs de ces droites seront dans le rapport constant des coordonnées correspondantes, parallèles à cet axe.* Car ces longueurs sont

des différences de quantités qui sont dans ce rapport. Mais si la première droite n'était pas parallèle à un des axes, la seconde ne serait pas parallèle à la première, comme nous l'avons déjà dit, et le rapport de leurs longueurs ne serait pas constant si m, n, p n'étaient pas égaux.

143. *Rapport de deux surfaces planes correspondantes, parallèles à l'un des plans coordonnés.* — Ces deux surfaces, terminées par des courbes quelconques correspondantes, et parallèles au plan YZ par exemple, peuvent être partagées par des droites correspondantes, parallèles à l'axe des z, et à des distances infiniment petites. Les longueurs des cordes correspondantes seront dans le rapport p; les distances de deux cordes consécutives et de leurs correspondantes seront dans le rapport n; le rapport des éléments correspondants sera donc np; il en sera donc de même de leurs sommes, et de leurs limites. Les deux aires sont donc dans le rapport np.

144. *Rapport de deux volumes terminés par des surfaces correspondantes.* — On décomposera ces volumes par des plans correspondants infiniment voisins, perpendiculaires à un des axes, celui des x par exemple. Les distances correspondantes de deux plans consécutifs seront dans le rapport m. Les sections des volumes par les plans correspondants seront, comme nous venons de le démontrer, dans le rapport np. Les éléments de volume compris entre les plans consécutifs sont donc dans le rapport mnp; et, par conséquent, le premier volume est au second dans le rapport mnp.

145. *Le produit des x de deux points non correspondants considérés respectivement dans les deux systèmes est égal au produit des x des points qui leur sont respectivement correspondants, et de même pour les y et les z.*

Soient, en effet, x, y, z et X', Y', Z' les coordonnées des deux premiers points m, M'; X, Y, Z celles du point M qui, dans le second système, est le correspondant de m; et x', y', z' celles de m' du premier système, correspondant de M' du second, on aura évidemment $xX' = Xx'$, puisque $X' = mx'$ et $X = mx$.

Et l'on verrait de même que l'on aura

$$yY' = Yy', \quad zZ' = Zz'.$$

On peut encore déduire de là une autre proposition utile.

En effet, si l'on désigne par r, R les distances de deux points correspondants, à l'origine; par r', R', les analogues pour deux autres, on aura

$$rR' \cos rR' = xX' + yY' + zZ',$$

$$r'R \cos r'R = x'X + y'Y + z'Z;$$

d'où

$$rR' \cos rR' = r'R \cos r'R.$$

146. *La différence des carrés des distances du centre à deux points correspondants de deux ellipsoïdes homofocaux, est constante.*

Soient les équations de ces deux ellipsoïdes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} + \frac{Z^2}{C^2} = 1;$$

ils constituent nécessairement deux surfaces correspondantes, comme nous l'avons démontré pour deux ellipsoïdes quelconques, les rapports des coordonnées des points correspondants étant ceux des axes parallèles. Ces ellipsoïdes étant homofocaux, on a

$$A^2 - a^2 = B^2 - b^2 = C^2 - c^2.$$

Cela posé, la différence des carrés des distances de deux

points (x, y, z), (X, Y, Z) au centre sera

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - (x^2 + y^2 + z^2),$$

ou

$$\frac{A^2}{a^2} x^2 + \frac{B^2}{b^2} y^2 + \frac{C^2}{c^2} z^2 - (x^2 + y^2 + z^2),$$

et en réduisant

$$\frac{A^2 - a^2}{a^2} x^2 + \frac{B^2 - b^2}{b^2} y^2 + \frac{C^2 - c^2}{c^2} z^2,$$

ou, d'après les conditions données,

$$(A^2 - a^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right),$$

c'est-à-dire simplement $A^2 - a^2$, ce qui prouve la proposition énoncée.

147. *Si l'on prend deux points quelconques m, m' sur la surface d'un ellipsoïde, et les points correspondants* M, M' *sur un ellipsoïde homofocal quelconque, les distances* M'm *et* Mm' *seront égales.*

Car si l'on désigne par r, R, r', R' les distances respectives de ces quatre points au centre, on aura, par la dernière proposition,

$$R^2 - r^2 = R'^2 - r'^2,$$

ou

$$R^2 + r'^2 = R'^2 + r^2,$$

et, d'après l'avant dernière,

$$R r' \cos R r' = R' r \cos R' r.$$

Et comme

$$\overline{Mm'}^2 = R^2 + r'^2 - 2 R r' \cos R r',$$
$$\overline{M'm}^2 = R'^2 + r^2 - 2 R' r \cos R' r,$$

il en résulte

$$M'm = Mm'$$

CHAPITRE XII.

ATTRACTION D'UN ELLIPSOÏDE SUR UN POINT EXTÉRIEUR

148. Nous avons calculé précédemment l'action d'un ellipsoïde plein, homogène, sur un point quelconque de son intérieur ou de sa surface. Il reste à calculer celle qu'il exerce sur un point extérieur; question beaucoup plus difficile, et qui a assez longtemps arrêté les géomètres. Leurs efforts tendaient à ramener ce cas au premier. Maclaurin l'a tenté le premier, et n'a pas complètement réussi; d'autres géomètres y sont parvenus après lui, mais si péniblement, qu'on avait continué les recherches sur ce point important. Enfin, Ivory est parvenu à découvrir un théorème remarquable par sa simplicité, et qui ramène presque sans travail la seconde question à la première. Elle est fondée sur les propriétés des points correspondants, et c'est pour cela que nous avons exposé cette théorie avec quelque détail.

149. *Théorème d'Ivory.* — Ce théorème ramène l'action d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur quelconque, à celle qu'exercerait un ellipsoïde homofocal passant par ce point, sur le correspondant de ce point sur la surface de l'ellipsoïde donné : question dont on connaissait la solution, que nous avons précédemment exposée.

Soient $\alpha, 6, \gamma$ les coordonnées d'un point extérieur à un ellipsoïde dont les demi-axes sont A, B, C; la composante X de son attraction sur ce point sera

$$X = f\rho \int\int\int \frac{(x-\alpha)\,dx\,dy\,dz}{r^3},$$

les intégrales s'étendant au volume entier. Intégrant par rapport à x, et désignant par r_1, r_2 les distances du point attiré aux points extrêmes du filet de l'ellipsoïde, dans lequel on a fait l'intégration, on trouvera

$$X = -f\rho \int\int dy\,dz \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Concevons maintenant un ellipsoïde homofocal avec le premier, passant par le point donné, et cherchons son attraction sur le point correspondant à ce dernier sur la surface du premier ellipsoïde. Pour cela nous prendrons le rectangle $dy'\,dz'$, dont les points seront les correspondants de ceux de $dy\,dz$, et nous intégrerons dans l'étendue du filet du second ellipsoïde, qui se projette suivant $dy'\,dz'$ sur le plan YZ. Nous trouverons, pour la composante de l'attraction de ce dernier corps sur le point correspondant au point donné,

$$X' = -f\rho \int\int dy'\,dz' \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Les rayons r_1 et r_2 sont les mêmes que pour le premier ellipsoïde, puisque leurs extrémités sont respectivement correspondantes de celles des autres.

Or, $dy'\,dz' : dy\,dz :: B'C' : BC$; et cette proportion ayant lieu pour les portions des intégrales relatives à deux filets correspondants quelconques, aura lieu pour les intégrales elles-mêmes, d'où résulte

$$X : X' :: BC : B'C',$$

et de même

$$Y : Y' :: AC : A'C',$$
$$Z : Z' :: AB : A'B'.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant, qui est celui d'Ivory :

Les attractions que deux ellipsoïdes homofocaux exercent parallèlement à chaque axe, sur deux points correspondants placés sur leurs surfaces respectives, sont entre elles comme les produits des deux axes perpendiculaires à chaque composante.

Remarque. — Poisson a montré que ce théorème était indépendant de la loi d'attraction. Car si la fonction de la distance qui exprime l'attraction est désignée par $F(r)$, on aura

$$X = f\rho\iiint \frac{(x-\alpha)\,dx\,dy\,dz\,F(r)}{r};$$

intégrant par rapport à x l'expression $(x-\alpha)F(r)\frac{dx}{r}$, ou $F(r)\,dr$, et désignant le résultat par $\varphi(r)$, on aura

$$X = f\rho\iint dy\,dz[\varphi(r_1)-\varphi(r_2)].$$

Pour le second ellipsoïde, on trouvera de même

$$X' = f\rho\iint dy'\,dz'[\varphi(r_1)-\varphi(r_2)];$$

d'où l'on conclurait encore

$$X : X' :: BC : B'C',$$

et de même pour les autres composantes.

150. *Application du théorème d'Ivory.* — On voit que, d'après ce théorème, on connaîtra les composantes de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur, en faisant passer par ce point un ellipsoïde homofocal, et cherchant les composantes de son attraction sur le point correspondant de la surface du premier, qui est dans son intérieur; puis multipliant les composantes par les rapports des produits des axes perpendiculaires.

Soient A, B, C les trois demi-axes de l'ellipsoïde pro-

posé, A′, B′, C′ ceux de l'ellipsoïde homofocal passant par le point donné (α, β, γ), A″, B″, C″ ceux d'un ellipsoïde semblable au second et passant par le point $(\alpha', \beta', \gamma')$ correspondant à (α, β, γ) sur le premier; enfin M, M′, M″ les volumes de ces trois corps.

Les composantes de l'attraction du troisième ellipsoïde sur le point $(\alpha', \beta', \gamma')$ seront les mêmes que celles du second. On aura donc, d'après les formules connues pour les points de la surface,

$$X' = -\frac{3M''f\alpha'}{A''^2}\int_0^1 \frac{v^2 dv}{\sqrt{1+\frac{B''^2-A''^2}{A''^2}v^2}\sqrt{1+\frac{C''^2-A''^2}{A''^2}v^2}}.$$

Mais, d'après la similitude des deux derniers ellipsoïdes, on a

$$\frac{B''^2-A''^2}{A''^2} = \frac{B'^2-A'^2}{A'^2}, \quad \frac{C''^2-A''^2}{A''^2} = \frac{C'^2-A'^2}{A'^2}$$

$\frac{M''}{A''^3} = \frac{M'}{A'^3}$, et, de plus, $\alpha' = \frac{\alpha A}{A'}$, donc, en observant que l'on a $B'^2 - A'^2 = B^2 - A^2$, $C'^2 - A'^2 = C^2 - A^2$, on aura

$$X' = -\frac{3M'f\alpha A}{A''}\int_0^1 \frac{v^2 dv}{\sqrt{1+\frac{B^2-A^2}{A'^2}v^2}\sqrt{1+\frac{C^2-A^2}{A'^2}v^2}}.$$

Posons maintenant

$$\frac{v}{A'} = \frac{u}{A},$$

et multipliant par $\frac{BC}{B'C'}$, on trouvera

$$X = -\frac{3Mf\alpha}{A^2}\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2 du}{\left(1+\frac{B^2-A^2}{A^2}u^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{C^2-A^2}{A^2}u^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il en serait de même des deux autres composantes.

Passage du théorème d'Ivory à celui de Maclaurin.

151. Soient X, Y, Z les composantes de l'attraction de l'ellipsoïde dont les trois demi-axes sont A, B, C, sur le point extérieur dont les coordonnées sont α, 6, γ; X″, Y″, Z″ les composantes de l'attraction de l'ellipsoïde homofocal passant par le point $(\alpha, 6, \gamma)$ sur le point correspondant, qui a pour coordonnées $\frac{\alpha A}{A'}$, $\frac{6 B}{B'}$, $\frac{\gamma C}{C'}$, A′, B′, C′ étant les demi-axes de cet ellipsoïde; et enfin X′, Y′, Z′ les composantes de l'attraction du second ellipsoïde sur le point $(\alpha, 6, \gamma)$ de sa surface.

Le théorème d'Ivory donne

$$\frac{X}{X''} = \frac{BC}{B'C'}, \quad \frac{Y}{Y''} = \frac{AC}{A'C'}, \quad \frac{Z}{Z''} = \frac{AB}{A'B'},$$

mais, pour tout point de l'intérieur d'un ellipsoïde, les composantes de l'attraction sont proportionnelles à la coordonnée parallèle; donc

$$\frac{X''}{X'} = \frac{A}{A'}, \quad \frac{Y''}{Y'} = \frac{B}{B'}, \quad \frac{Z''}{Z'} = \frac{C}{C'};$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$\frac{X}{X'} = \frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'}.$$

Les trois composantes X, Y, Z étant proportionnelles à X′, Y′, Z′, les résultantes sont dans une même direction, et leurs intensités sont entre elles comme les composantes, c'est-à-dire :: ABC : A′B′C′. D'où résulte ce théorème :

L'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur a la même direction que celle qu'exercerait sur lui un ellipsoïde homofocal passant par ce point, et leurs intensités sont comme les volumes des deux corps.

L'usage de ce théorème est évident puisqu'il ramène à l'attraction d'un ellipsoïde facile à déterminer sur un point donné de sa surface.

Remarque. — Si l'on comparait l'action d'un second ellipsoïde homofocal au premier, et auquel le point donné serait extérieur, à l'action de celui qu'on a fait passer par ce point, on obtiendrait la même conséquence que pour le premier; d'où l'on conclut cette proposition que *deux ellipsoïdes homofocaux exercent sur un point extérieur aux deux, des actions de même direction, et proportionnelles aux volumes de ces deux corps.*

CHAPITRE XIII.

AUTRES SOLUTIONS DU PROBLÈME DE L'ATTRACTION DES ELLIPSOÏDES.

La théorie que nous venons d'exposer est complète et connue depuis longtemps. L'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point de sa surface, y est ramenée au plus grand degré de simplicité dont elle soit susceptible. L'attraction sur un point extérieur s'en déduit immédiatement, soit par le beau théorème d'Ivory, soit par celui de Maclaurin; et ce dernier pouvait être démontré dans toute sa généralité, soit d'après celui d'Ivory, soit directement par la remarquable analyse de O. Rodrigues. Nous pourrions donc nous borner à ce qui précède; mais nous ne croyons pas pouvoir nous dispenser de dire quelques mots des importants travaux de M. Chasles sur le même sujet; on en trouvera l'exposé complet dans les Traités de Mécanique.

152. Lemme. — *Si l'on considère deux ellipsoïdes semblables* E, ε, *et d'une autre part deux ellipsoïdes* E', ε', *semblables entre eux, mais non aux premiers, et ayant entre leurs axes les mêmes rapports que les premiers, si* E *et* E' *sont homofaux, ε et ε' le seront aussi.*

Nous donnerons le nom de *couches homofocales* aux volumes compris respectivement entre les ellipsoïdes E, ε et E', ε'. En effet, en passant de E à ε, les distances focales ont varié dans le même rapport que les axes de ces ellipsoïdes semblables, et il en sera de même dans le second système. Or le rapport des axes est le même dans les deux

systèmes; il en sera donc de même des rapports des excentricités, donc ces excentricités étant les mêmes pour E et E', elles le seront pour e et e'.

Il est inutile de dire qu'aucun autre ellipsoïde que e', semblable à E' ne pouvant être homofocal avec e', ne pourra l'être avec e. On voit aussi que, réciproquement, si les ellipsoïdes E, E' sont homofocaux, e et e' le sont aussi; que le rapport des axes de E et e sera le même que pour E' et e', et que, par suite, le rapport des différences des axes à ces axes mêmes, sera le même.

153. *Réduction de l'attraction d'une couche ellipsoïdale sur un point extérieur.*

Considérons une couche terminée par deux surfaces ellipsoïdales semblables E, e, telles que les différences de leurs axes homologues soient infiniment petites; nous allons ramener son action sur un point extérieur M à celle qu'exercerait sur ce point une autre couche, dont la surface extérieure passerait par M et serait avec la première dans les conditions du lemme précédent.

Désignons par E', e' les deux surfaces semblables et homofocales respectivement avec E et e qui terminent cette couche, dont la première E' passe par M.

Les surfaces E et E' étant considérées comme correspondantes, les surfaces e et e', pour lesquelles le rapport des axes est le même que pour E et E', seront aussi correspondantes dans le même système. D'où il suit que si l'on décompose la couche Ee en éléments infiniment petits dans tous les sens, terminés par des surfaces quelconques, les surfaces correspondantes partageront la couche E'e' en éléments dont le rapport avec les premiers sera le produit des trois rapports des coordonnées de même nom; et, par conséquent, ces éléments seront comme les produits des trois axes des ellipsoïdes correspondants et leurs sommes, et

par suite les volumes des couches, seraient dans ce même rapport.

Maintenant si nous divisons le volume de chaque élément de la couche Ee par la distance au point M qui est situé sur E', et le volume de chaque élément de E'e' par sa distance au point *m* homologue de M, qui est situé sur la surface E, ces deux distances étant égales, d'après les propriétés démontrées précédemment, les quotients correspondants seront entre eux comme les éléments eux-mêmes, ou comme les produits des trois axes des ellipsoïdes correspondants; d'où il suit que la fonction désignée par V (n° 133), relative au volume Ee et au point M, est à la fonction V', relative au volume E'e' et au point *m*, dans le rapport des produits des trois axes de E et des trois axes de E'.

Si maintenant on déplace le point M sur l'ellipsoïde E', *m* se déplacera sur E, et V' sera invariable, puisque le point *m* reste dans l'intérieur de *e''*; et, par suite, V le sera lui-même, puisque son rapport à V' est toujours le même. D'où il suit que E' est une surface de niveau relativement à l'attraction de la couche Ee; c'est-à-dire que la résultante de l'attraction de la couche Ee sur un point quelconque M de E', est normale à cette surface.

Cette proposition ayant lieu pour toute autre couche dans les mêmes conditions que Ee, et correspondant à une même couche E'e', aura lieu pour cette dernière. Donc l'action sur M sera aussi normale à l'ellipsoïde E'.

Maintenant, pour avoir les composantes respectives de l'action des couches Ee, E'e' sur M, il faudrait différentier successivement les fonctions V, V' par rapport à α, $\mathfrak{G}$, γ, coordonnées de M, et l'on obtiendrait ainsi des dérivées dont les rapports respectifs seraient celui des fonctions mêmes V et V', ou des produits des axes des ellipsoïdes E, E'; d'où se déduit cette proposition due à M. Chasles :

Pour connaître l'action d'une couche infiniment mince

comprise entre deux ellipsoïdes semblables sur un point extérieur, il suffit de calculer celle qu'exerce sur le même point, une couche homofocale de même nature, dont la surface extérieure passe par ce point. Les résultantes de ces actions auront la même direction, normale à l'ellipsoïde qui passe par ce point, et seront entre elles comme les volumes des couches, ou comme les produits des axes des ellipsoïdes correspondants.

Si l'on considérait une autre couche E″e″ homofocale avec Ee, on aurait une conséquence semblable, et, en éliminant ce qui appartient à E′e′, on verrait que les actions des couches Ee, E″e″ sur M sont de même direction et proportionnelles aux produits des axes de leurs surfaces extérieures ou de leurs surfaces intérieures.

154. *Nouvelle démonstration du théorème de Maclaurin.*

Le théorème précédent étant démontré, M. Chasles a fait voir comment on en pouvait déduire bien simplement celui de Maclaurin.

Il s'agit de comparer les actions de deux ellipsoïdes homofocaux homogènes, dont les demi-axes sont a, b, c et A, B, C, sur un même point M extérieur aux deux.

Pour cela on décomposera l'un d'eux par des surfaces ellipsoïdales semblables, infiniment voisines, et le second par des surfaces ellipsoïdales semblables entre elles et homofocales avec celles du premier, les axes de deux surfaces correspondantes seront les mêmes que pour les suivantes, et par suite que pour celles des ellipsoïdes donnés. Deux couches homofocales correspondantes donneront sur M des actions de même direction, et proportionnelles aux produits des axes de leurs surfaces correspondantes, et par conséquent aux produits abc, ABC.

Cette direction changera avec les couches, mais sera

toujours la même pour deux couches correspondantes, et le rapport des forces qu'elles produisent sera toujours celui de abc à ABC. D'où il suit qu'en composant séparément toutes ces forces passant par M, pour chacun des deux ellipsoïdes proposés, on aura des résultantes de même direction et dont les intensités seront dans le rapport des produits abc, ABC, ou des volumes des ellipsoïdes.

De là résulte cette conséquence qui n'est autre chose que le théorème de Maclaurin :

Deux ellipsoïdes homogènes homofocaux exercent sur un même point extérieur des actions de même direction, et proportionnelles à leurs volumes.

Et comme on a les expressions des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point de sa surface, *il suffira, pour obtenir l'action d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur, de faire passer par ce point un ellipsoïde homofocal, et de multiplier les composantes de son attraction sur ce point par le rapport des volumes du premier ellipsoïde et du second.*

M. Chasles ne s'est pas borné à donner cette nouvelle démonstration du théorème de Maclaurin, il est parvenu, au moyen de considérations géométriques, à l'expression des composantes de l'attraction d'une couche ellipsoïdale sur un point extérieur ; et, en faisant l'intégration relativement à toutes les couches d'un ellipsoïde, il a obtenu directement les formules des composantes de l'attraction de l'ellipsoïde entier, auxquelles on était déjà parvenu par les procédés que nous avons fait connaître.

Nous n'en dirons pas davantage sur ce sujet, qui est traité avec détail dans les Ouvrages spéciaux. Nous nous sommes même peut-être un peu trop étendu sur cette théorie ; mais son utilité dans les questions importantes de la Mécanique céleste, expliquera suffisamment, je l'espère, la longueur de ces développements.

CHAPITRE XIV.

DE LA FORCE DE FROTTEMENT.

155. Toutes les fois que nous avons eu à considérer des surfaces ou des lignes résistantes, nous avons supposé qu'elles ne pouvaient détruire que des forces qui leur étaient normales. Mais il n'en est plus de même dans la réalité, et les surfaces matérielles peuvent, dans certaines limites, détruire des forces obliques et même des forces tangentielles. Plus ces surfaces sont polies, moins elles offrent de résistance tangentielle; et nous nous sommes placé jusqu'ici à la limite idéale de surfaces infiniment polies, et incapables de détruire la moindre force tangentielle, et, par suite, toute force faisant avec la normale un angle, si petit qu'il soit. Il faut donc, dans les applications matérielles de la science, tenir compte de ces forces qui peuvent se développer au contact des corps, et qu'on nomme *forces de frottement*.

Les lois qu'elles suivent dans leur production et leur action ne peuvent être déduites que de l'expérience, et nous allons faire connaître les résultats généraux auxquels elle a conduit.

156. Dans la recherche des conditions d'équilibre, nous avons toujours supposé que les courbes ou surfaces fixes ne pouvaient donner naissance qu'à des forces normales. Mais il n'en est pas ainsi dans la réalité; et l'expérience prouve que la résistance d'une surface ou d'une courbe peut détruire non-seulement des forces normales quelconques,

mais encore des forces tangentielles comprises entre certaines limites. Ces dernières sont d'autant moindres que les surfaces en contact sont plus polies, et l'on peut supposer qu'elles n'existeraient pas, si ces surfaces étaient entièrement dépourvues d'aspérités, comme nous les avons supposées dans tout ce qui précède.

Les circonstances dans lesquelles nous nous plaçions se rapportent donc en quelque sorte à un cas limite qui ne se rencontre jamais rigoureusement dans la nature; et il est nécessaire, pour les applications pratiques, d'étudier les modifications qu'apporte aux conditions d'équilibre, l'introduction de ces nouvelles forces, que nous désignons sous le nom de forces de *frottement*.

Les lois que suivent ces forces ne peuvent être déduites que de l'expérience, et nous allons faire connaître les résultats généraux auxquels elle a conduit.

Lorsqu'un corps en contact avec un plan par tous les points d'une face plane, est pressé contre ce plan par une certaine force, on ne peut le mettre en mouvement par le moyen d'une force située dans le plan, que lorsqu'elle dépasse une certaine limite. Cette limite, qui n'atteint sa plus grande valeur que quand le contact a duré un certain temps, est la mesure de la force de frottement que peut produire la pression du corps contre le plan. Mais cette force ne se développe que lorsque l'on sollicite le corps par une force qui a une composante située dans le plan de contact, et elle est égale et opposée à cette dernière, tant que le corps ne se met pas en mouvement. Elle peut donc varier arbitrairement quant à sa direction et son intensité, elle n'est assujettie qu'à être située dans le plan de contact, et à ne pas dépasser la limite dont il a été question tout à l'heure, et qui doit être le seul objet de nos recherches. Ajoutons qu'elle se rapporte au cas où l'on fait

prendre à tous les points du corps un mouvement parallèle et égal.

Le frottement d'un corps peut détruire non-seulement une force unique, mais un nombre quelconque de forces réductibles ou non à une seule; les forces qu'il représente sont donc dépendantes de celles que l'on fait agir dans le plan de contact.

Cela posé, nous ne nous occuperons que de la détermination de la force maximum que le frottement peut détruire, et que nous prendrons pour mesure du frottement lui-même.

Or, l'expérience a démontré que :

1° La force de frottement varie proportionnellement à la pression, toutes les autres circonstances restant les mêmes;

2° Elle ne dépend pas de l'étendue de la surface en contact, pourvu qu'elle ne renferme pas de pointes ou d'arêtes, mais seulement de la nature et du poli des deux surfaces;

3° Lorsque l'un de ces corps glisse sur l'autre, la force de frottement est indépendante de la loi du mouvement; elle est déterminée en grandeur par la pression et la nature des surfaces : et sa direction est, pour chacun des deux corps, en sens contraire de sa vitesse relative.

On conçoit facilement comment les deux premières lois ont pu être reconnues. En posant un corps sur un plan horizontal et le tirant par un cordon horizontal passant sur une poulie de renvoi, et à l'extrémité duquel on appliquait des poids connus, on a pu déterminer avec précision le poids le plus faible qui met le corps en mouvement, et qui mesurera la force de frottement. En chargeant le corps de divers poids, on a déterminé les nouvelles valeurs de ceux qui déterminent le mouvement, et l'on a reconnu que leurs rapports à ceux qui mesurent la pression étaient toujours les mêmes.

En diminuant la surface en contact, ou en posant le corps sur les différentes faces également polies, on a encore reconnu que le rapport du frottement à la pression était le même. Ces expériences, répétées un grand nombre de fois, et sur des corps très-variés, ont toujours conduit aux mêmes conséquences.

Ce rapport du frottement à la pression, qui ne varie qu'avec la nature des substances, est désigné sous le nom de *coefficient du frottement*.

Quant à la troisième loi, elle a été démontrée par des expériences dont l'interprétation exige quelques notions de Dynamique. Ces détails trouveront mieux leur place dans un Cours de machines, et nous nous bornerons à l'énoncé de cette loi.

157. *Angle du frottement.* — Si un corps soumis à la seule action de la pesanteur repose sur un plan horizontal par une face plane, et qu'on fasse tourner ce plan autour d'une droite horizontale, le corps commencera à glisser quand l'inclinaison du plan aura atteint une certaine valeur, qu'il est facile de déterminer.

Soient, en effet, P le poids du corps et α l'inclinaison du plan mobile sur le plan horizontal; la pression du corps sur le plan, ou la composante de son poids perpendiculairement à ce plan, sera $P\cos\alpha$; et la composante parallèle aura pour valeur $P\sin\alpha$.

Lorsque l'inclinaison variable α aura atteint la valeur particulière μ pour laquelle le corps commence à glisser, la force de frottement sera précisément égale à la composante parallèle au plan incliné; et si l'on désigne par f le rapport du frottement à la pression, on aura

$$f = \frac{P\sin\mu}{P\cos\mu} = \tang\mu.$$

Ainsi tous les corps de même nature et également polis, et généralement tous ceux qui auront le même coefficient de frottement relativement au plan mobile, commenceront à glisser sous un même angle dont la tangente trigonométrique est égale au coefficient du frottement, et que l'on désigne sous le nom d'*angle du frottement*.

Cette expérience peut aussi servir à démontrer les deux premières lois du frottement. En plaçant sur un plan mobile autour d'une horizontale, un corps dont les différentes faces planes sont également polies, on reconnaît qu'il commence à glisser pour une même inclinaison du plan, quelle que soit l'aire de la face de contact, et quel que soit le poids dont on surcharge le corps. On conclut de là que, lorsque la nature et le poli des surfaces ne changent pas, la force de frottement est proportionnelle à la pression, et indépendante de l'étendue de la face de contact. L'angle sous lequel le glissement commence, détermine le coefficient du frottement, qui en est la tangente trigonométrique.

158. *Équilibre d'un corps pressé contre un plan par une force oblique.* — Soient P (*fig.* 19) une force appliquée

Fig 19.



quée à un corps M, A le point où sa direction rencontre la face de contact, et θ l'angle qu'elle fait avec la normale AN. La pression du corps contre le plan sera $P\cos\theta$; le frottement sera exprimé par $fP\cos\theta$, f étant le coefficient du frottement; et la force dans le plan fixe, qui tend à mettre

le corps en mouvement, est égale à $P \sin\theta$. Il y aura donc équilibre si l'on a

$$P \sin\theta < f P \cos\theta,$$

ou

$$\tang\theta < f.$$

Ainsi, l'équilibre aura lieu, quelle que soit la force P, pourvu qu'elle fasse avec la normale un angle qui ne soit pas supérieur à l'angle du frottement.

Au reste, le cas que nous venons d'examiner ne diffère du précédent qu'en ce que la force P est de direction et de grandeur quelconque, au lieu d'être le poids même du corps.

159. *Équilibre du levier en ayant égard au frottement.* — Considérons un levier posé sur un autre corps, de sorte que le point d'appui ne soit pas fixé invariablement avec lui; et supposons-le sollicité par deux forces. Elles peuvent d'abord être remplacées par des forces égales et parallèles appliquées au levier au point d'appui, et, de plus, à deux couples. S'il n'y avait pas de frottement, il faudrait que les couples se détruisissent et que la résultante des deux forces transportées au point d'appui fût normale à la surface résistante. Mais, s'il peut exister un frottement entre les deux corps, il se composera avec les deux forces appliquées comme lui au levier, en son point de contact; il faudra donc encore que les deux couples se détruisent. Mais il ne sera plus nécessaire que les forces transportées au point d'appui donnent une résultante normale à la surface; il suffira que cette résultante fasse avec la normale un angle inférieur ou égal à l'angle du frottement.

160. *Équilibre d'un corps qui peut tourner autour d'un axe fixe.* — Considérons maintenant un corps solide percé d'un trou cylindrique, au travers duquel passe un cylindre

fixe d'un diamètre à peu près égal. Supposons ce corps sollicité par deux forces situées dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, et cherchons les conditions d'équilibre, en ayant égard à la force de frottement. Concevons que tout le système soit réduit à la section par ce plan perpendiculaire, ou, d'autres termes, que le corps n'ait pas d'épaisseur sensible.

Soit C (*fig.* 20) le point de contact du cercle fixe ayant son centre en O, et du cercle mobile appartenant au corps.

Fig. 20

Il doit y avoir équilibre entre les deux forces données P, Q et la force de frottement F appliquée en C tangentiellement au cercle. Il est donc nécessaire et suffisant que les deux forces P, Q aient une résultante passant en C et faisant avec la normale un angle moindre que celui du frottement.

Ainsi, lorsque les forces données auront une résultante qui passera par un point quelconque C du cercle appartenant au corps, et fera avec sa normale un angle égal ou inférieur à celui du frottement, le corps sera en équilibre si l'on fait en sorte que le contact avec le cercle fixe ait lieu au point C.

En considérant le cas extrême où l'équilibre est au moment de se rompre, la résultante R des forces P et Q fait avec la normale au cercle un angle égal à l'angle du frottement; la pression normale exercée sur le cylindre fixe est la projection de la résultante R sur le rayon, ou $\frac{R}{\sqrt{1+f^2}}$; elle est donc toujours moindre que la résultante R. La force tangentielle appliquée au cylindre fixe s'obtiendra en

multipliant la pression par le coefficient f, et sera, par conséquent, égale à $\frac{Rf}{\sqrt{1+f^2}}$. Leur résultante ne sera autre chose que R, comme cela devait être évidemment, puisque la résultante R des forces données est détruite par la résistance du cylindre fixe.

161. *Équilibre d'un corps sur un plan fixe.* — Supposons un corps pesant posé sur un plan incliné à l'horizon, et sollicité par une force P comprise dans le plan vertical, passant par le centre de gravité du corps, et la normale au plan incliné. Réduisons tout le système à la section faite par ce plan, et cherchons la condition d'équilibre en tenant compte du frottement.

Soient IV (*fig.* 21) la verticale menée par le centre de gravité du corps, PI la direction de la force P, Q le poids

Fig. 21.



du corps, et α l'inclinaison du plan LA sur le plan horizontal AB; il faut exprimer que leur résultante est détruite par la résistance normale du plan AL et par le frottement. En désignant par θ l'angle de la force P avec le plan incliné, la pression exercée sur ce dernier sera égale à

$$Q\cos\alpha - P\sin\theta,$$

θ étant considéré comme positif au-dessus de la direction AL, et comme négatif au-dessous. Si l'équilibre est au mo-

ment de se rompre, la force de frottement sera égale à

$$f(Q\cos\alpha - P\sin\theta);$$

mais, en général, elle en sera une fraction quelconque k. La composante totale dans le sens du plan sera

$$Q\sin\alpha - P\cos\theta;$$

et pour que l'équilibre ait lieu, il est nécessaire et suffisant que cette expression, positive ou négative, soit égale à la force de frottement; ce qui s'exprimera par l'équation suivante :

$$Q\sin\alpha - P\cos\theta = kf(Q\cos\alpha - P\sin\theta),$$

k étant compris entre -1 et $+1$, et devenant -1 ou $+1$ dans le cas où l'équilibre est sur le point de se rompre, soit dans un sens, soit dans l'autre.

On tire de cette équation

$$P = \frac{Q(\sin\alpha - kf\cos\alpha)}{\cos\theta - kf\sin\theta}.$$

Si $k = 0$ et $\theta = 0$, on retombe sur l'expression connue

$$P = Q\sin\alpha.$$

162. Cherchons la direction dans laquelle il faut faire agir la force P pour obtenir le plus d'avantages possible, en supposant le corps prêt à glisser, et, pour cela, cherchons la valeur de θ, qui, en supposant $k = 1$, donne le minimum de P ou le maximum du dénominateur. Les deux premières dérivées de ce dernier, par rapport à θ, ont pour expressions

$$-\sin\theta - f\cos\theta,$$

et

$$-\cos\theta + f\sin\theta.$$

En égalant la première à zéro, on trouve

$$\tang\theta = -f;$$

d'où il suit que la force P doit être dirigée en dessous du plan, et faire avec lui un angle égal à l'angle du frottement. La seconde dérivée se réduit alors à

$$-\cos\theta(1+f^2);$$

elle est donc négative pour cette valeur de θ; d'où il suit que le dénominateur de P est maximum, et, par suite, P minimum.

On pourrait encore chercher l'inclinaison θ, qui donne la plus petite valeur de P, propre à faire remonter le corps. Il faut alors supposer $k=-1$, et chercher le minimum de $\frac{1}{\cos\theta+f\sin\theta}$ ou le maximum de $\cos\theta+f\sin\theta$. On en tire

$$-\sin\theta+f\cos\theta=0,\quad \tang\theta=f;$$

ce qui montre que la force doit être dirigée au-dessus du plan incliné et faire avec lui un angle égal à l'angle du frottement, quelle que soit son inclinaison α.

Cet angle, qui est le plus favorable à la traction d'un corps pesant sur un plan quelconque, porte le nom d'*angle de traction*; et, comme nous venons de le prouver, il n'est autre que l'angle du frottement.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur la théorie du frottement. Nous n'avons voulu que donner une idée de la manière dont les forces de cette espèce modifient les conditions de l'équilibre : ce qui est de la plus haute importance dans les applications. Nous renvoyons, pour de plus grands détails, aux Traités spéciaux sur les machines.

DEUXIÈME SECTION.

DU MOUVEMENT
PRODUIT PAR LES FORCES.

DU MOUVEMENT
PRODUIT PAR LES FORCES.

CHAPITRE PREMIER.
DU MOUVEMENT ET DU TEMPS.

163. *Du mouvement.* — Lorsque la distance de deux points change d'une manière continue, on dit que ces points sont en mouvement l'un par rapport à l'autre; et, généralement, lorsque les distances d'un point aux différents points d'un système rigide varient d'une manière continue, ou, en d'autres termes, lorsque la position de ce point par rapport à ce système change d'une manière continue, on dit que ce point est en mouvement par rapport au système. Le lieu de ces positions relatives se nomme sa *trajectoire relative à ce système*.

Si au lieu d'un point on en a un nombre quelconque formant un système rigide, on dira que ce système est en mouvement par rapport au premier, lorsque les positions relatives de ses points varieront d'une manière continue.

Nous n'entendrons jamais autre chose que cela par mouvement; ce sera toujours un déplacement relatif; nous n'attacherions aucun sens à un déplacement absolu.

Mais comme notre point de vue choquera presque tout

le monde au premier abord, nous croyons utile de l'appuyer de quelques développements, et nous ne doutons pas qu'après réflexion, il ne soit adopté par tous ceux qui ont accepté complètement nos données de la science de l'étendue.

Il est encore sans doute des philosophes qui croient à l'existence de ce qu'on appelle l'*espace absolu*, indépendant de la création, qui existait avant elle, et subsisterait encore si elle était anéantie. Ils disent cet espace immobile, parce qu'il n'y aurait aucune raison pour qu'il se déplaçât d'un *côté* plutôt que d'un autre, et ne cherchent nullement à se rendre compte de ce qu'ils entendent par *direction absolue*. Chaque point de cet être infini a pour eux une personnalité propre, qu'il conserve éternellement avec son immobilité; et c'est à ces points, qu'ils appellent *fixes*, qu'ils comparent tous les points de la création. Le mouvement absolu d'un point matériel consiste pour eux dans sa coïncidence successive avec des points différents de l'espace immobile. Le mouvement relatif est bien entendu par eux suivant la définition que nous en avons donnée; mais tous les principes et toutes les données premières sont rapportés par eux au prétendu mouvement absolu, et se déduisent, par une extension spécieuse, des observations faites sur les mouvements relatifs. De sorte que, dans l'application de leur science aux phénomènes naturels, il n'y aura aucune contradiction ni aucune erreur à craindre, et c'est au nom de la raison seule, et non de la pratique, que nous cherchons à corriger le point de départ de la science.

Dans nos données de la science de l'étendue, nous pensons avoir fait justice de cet être imaginaire, qu'on appelle l'*espace*, et de la personnalité de ses points. Pour nous, par conséquent, le repos absolu est, non plus une chose impossible à reconnaître, mais tout simplement un non-sens; car ce serait la coïncidence avec les mêmes points

immuables de l'espace, auxquels nous n'accordons aucune existence, et dont la fixité prétendue est une chimère, dont la simple notion ne pourrait être ni définie ni sentie, c'est-à-dire ne pourrait s'acquérir ni par l'esprit ni par les sens.

On ne pourrait en effet définir l'immobilité de ces points qu'en l'admettant déjà dans d'autres, c'est-à-dire par un cercle vicieux. Et quant à l'évidence obtenue par les sens, on ne peut l'invoquer, puisque les hommes n'aperçoivent que des repos ou mouvements relatifs; de sorte que la conception de repos ou mouvement absolu, loin de pouvoir être rangée parmi les idées premières, admises par le sentiment de l'évidence, ne serait qu'une vague rêverie dont le fond serait un cercle vicieux.

Abandonnons donc cette fausse notion, dont l'inutilité est d'ailleurs évidente; car tous les principes que l'on établirait en l'admettant, ne pourraient jamais être fondés que sur des observations et des expériences relatives. Et à quoi bon partir du relatif pour établir par induction un absolu imaginaire, d'où l'on tirerait des principes applicables au relatif, qui est la seule chose réelle? Ne vaut-il pas mieux, après avoir établi les principes sur le relatif, les appliquer directement au réel, sans remonter à un absolu fantastique, pour l'abandonner immédiatement.

164. *Du temps.* — Le temps, comme l'espace et le mouvement, a donné lieu à bien des discussions entre les philosophes, ou les sophistes. La succession de nos sensations et des événements qui les ont produites, est incontestable pour tous les hommes. Mais entre ce sentiment et la pensée qu'il y a un être dans lequel se fasse cette succession, il y a un abîme. Le temps n'a pas plus d'existence réelle que l'espace; il est peut-être même encore moins saisissable. Ces deux prétendus êtres sont des créations fantastiques de l'ima-

gination de l'homme, qui veut toujours aller au delà de ce qu'il peut sentir et comprendre. Mais comme la succession des événements joue un grand rôle dans la nature et dans la vie des hommes, il est de la plus grande importance d'y introduire de l'ordre et de la précision, et c'est ce que l'on a fait d'abord en rapportant les divers événements à des événements successifs bien saillants, comme par exemple les retours du soleil au-dessus de l'horizon. Ce classement des événements au moyen des jours étant bientôt devenu insuffisant, il a fallu les rapporter à des intermédiaires, et l'on a appelé cela *diviser le temps en intervalles*, langage figuré qui a fini par faire croire que le temps était une grandeur, divisible comme les quantités géométriques, et sur laquelle se placent toutes les époques, comme les points de division sur une ligne.

Tout en protestant d'avance contre l'admission d'un être appelé *temps*, nous emploierons le langage ordinaire, nous classerons les événements successifs par ce que nous nommerons des *intervalles*, que nous exprimerons par des nombres, après en avoir défini avec précision l'*égalité* et l'*addition*.

Nous dirons que *deux intervalles de temps sont égaux lorsque deux corps identiques, placés dans des circonstances identiques au commencement de chacun de ces intervalles, et soumis aux mêmes actions et influences de toute espèce, auront parcouru à la fin de ces intervalles des espaces identiques, relativement au système rigide auquel on rapporte toutes les positions*.

Si après la détermination d'un intervalle, un autre commence et se termine, on dit que du commencement du premier à la fin du second il y a un intervalle égal à la somme des deux.

Ayant ainsi défini l'égalité et l'addition des intervalles, on choisira, pour terme de comparaison, un certain inter-

valle, qu'il est naturel de prendre en rapport avec la durée du jour; et tous les intervalles ou toutes les durées pourront être représentées par des nombres entiers ou fractionnaires, en entendant toujours les subdivisions égales de l'unité d'après la définition générale de l'égalité.

Le mouvement le plus facile à reproduire dans des conditions identiques est celui du pendule. La pesanteur étant une force constante, comme nous l'avons reconnu en traitant de l'équilibre, il suffit de replacer à chaque oscillation le pendule dans la même situation, et de le mettre autant que possible à l'abri des causes perturbatrices; les intervalles de temps correspondant aux retours à la première position, seront ce que nous avons appelé *égaux*, et, en donnant au pendule une longueur convenable, on pourra donner à la durée de son oscillation le rapport que l'on voudra avec celle du jour sidéral, qui est l'intervalle entre deux retours du globe terrestre à la même position par rapport aux étoiles, qui forment le système le plus considérable et le moins variable qu'il soit donné à l'homme de connaître.

C'est à ce dernier que nous rapporterons les grands mouvements. Mais, pour tout ce qui a trait au travail et aux besoins des hommes, que ce soit pour des expériences ayant pour but de conduire à des propriétés générales ou à des connaissances particulières, c'est au système des objets liés invariablement au globe terrestre qu'on rapporte les mouvements; et c'est ainsi qu'il faudra entendre ceux dont nous parlerons par la suite, à moins que nous ne prévenions expressément que nous voulons tenir compte du déplacement de la terre relativement aux étoiles, et que les mouvements relatifs à la terre doivent eux-mêmes être considérés relativement au système des étoiles.

CHAPITRE II.

MOUVEMENT UNIFORME D'UN POINT. — MOUVEMENT VARIÉ. — VITESSE.

165. Lorsqu'un point parcourt des espaces égaux en temps égaux, quelque petits que soient ces temps, on dit que son mouvement est *uniforme*.

Lorsqu'un mouvement n'est ni uniforme, ni composé d'une succession de mouvements uniformes, ayant des durées finies, on l'appelle mouvement *varié*.

Les mouvements uniformes peuvent différer les uns des autres par les espaces parcourus dans des temps égaux; et cette considération donne naissance à l'idée, d'abord un peu vague, de vitesse. Pour introduire dans le calcul cet élément indispensable, il est nécessaire d'en donner une définition précise; et nous appellerons *vitesse* d'un point dont le mouvement, rectiligne ou curviligne, est uniforme, l'espace qu'il parcourt dans l'unité de temps, ou, en d'autres termes, le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir; de sorte que le point dont la vitesse sera exprimée par le nombre 1 parcourra l'unité de longueur dans l'unité de temps.

On voit, d'après cette définition, que, dans un même mouvement, la quantité que nous appelons vitesse sera d'autant plus grande, que l'unité de temps le sera davantage; mais le rapport des vitesses dans deux mouvements différents en est complétement indépendant: c'est le rapport des espaces parcourus dans un même temps.

On voit encore que le nombre qui exprime la vitesse, varie

avec l'unité de longueur; il est d'autant plus grand, que cette unité est plus petite. Ces remarques sur l'influence des diverses unités sont indispensables pour reconnaître l'*homogénéité* des formules de la Dynamique.

166. Dans le mouvement varié, on ne peut plus appeler vitesse à un instant quelconque, l'espace parcouru pendant l'unité de temps, à partir de cet instant, parce qu'alors la vitesse du mobile dépendrait des variations plus ou moins irrégulières que subirait le mouvement au delà de l'époque dont il s'agit; et cette considération ne serait d'aucun intérêt.

C'est ainsi que, dans la théorie des courbes, on a pu prendre pour mesure de la courbure du cercle, en un quelconque de ses points, celle d'un arc égal à l'unité; mais pour une ligne où la courbure n'est pas proportionnelle à la longueur de l'arc, il n'a pas été possible de mesurer la courbure en un point par celle d'un arc égal à l'unité, commençant en ce point.

On fera des remarques semblables pour le poids spécifique en un point d'une substance non homogène; pour la température en un point d'un corps inégalement échauffé, etc.

Dans tous les cas de ce genre on procède de la même manière pour obtenir une définition précise et utile.

Soit M la position qu'occupe, à un certain instant, un point qui décrit d'un mouvement varié une ligne de nature quelconque. Après un certain temps θ, il sera parvenu en un autre point N, et le rapport de l'espace parcouru au temps, ou $\frac{MN}{\theta}$, exprimera la vitesse moyenne avec laquelle cet arc a été décrit; c'est-à-dire que ce serait l'espace parcouru pendant l'unité de temps, en supposant le mouvement uniforme, et tel, que l'arc MN fût parcouru pendant

le temps θ. Si maintenant on suppose que θ diminue indéfiniment, la vitesse moyenne $\frac{MN}{\theta}$ variera en même temps, et tendra vers une limite déterminée; et c'est cette limite que nous appellerons la vitesse du mobile au point M.

Ainsi, pour employer le langage reçu dans le calcul infinitésimal, on appelle vitesse d'un mobile, à un instant donné, la vitesse moyenne, ou simplement la vitesse, avec laquelle il décrit un arc infiniment petit, à partir de cet instant. Et nous appellerons direction de cette vitesse celle du mouvement du point sur la courbe, laquelle, d'après la discussion que nous avons faite dans la Géométrie, est la direction de la tangente à la trajectoire.

Si l'on désigne par t le temps, et par s la longueur des arcs de la ligne décrite, à partir d'une origine arbitraire, la limite du rapport $\frac{MN}{\theta}$ n'est autre chose que $\frac{ds}{dt}$. Ainsi la vitesse en un point quelconque du mouvement curviligne est exprimée par la première dérivée de l'espace parcouru, par rapport au temps. Et les vitesses des projections du point sur les axes seront $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. On les nomme par analogie *les composantes de la vitesse suivant les axes*.

167. Il est bon de remarquer que l'arc décrit dans un temps infiniment petit peut être considéré comme le produit de ce temps par la vitesse du mobile au commencement de ce petit intervalle. Car cet arc serait rigoureusement le produit de ce temps par la vitesse moyenne relative à cet intervalle; et cette vitesse moyenne diffère d'une quantité infiniment petite, de ce que nous avons appelé *vitesse* au commencement de l'intervalle. Il est évident que l'on pourrait encore prendre la vitesse à une époque quelconque du même intervalle. Le résultat ainsi obtenu ne différera

jamais de celui que l'on cherche, que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même, et pourra par conséquent lui être substitué toutes les fois que l'on n'aura à considérer que des limites de rapports ou de sommes.

Ainsi, par exemple, l'espace parcouru dans un temps fini, sera la limite de la somme des produits des éléments infiniment petits de ce temps, par les vitesses correspondantes aux commencements de ces éléments. La vitesse, telle que nous venons de la définir, joue donc le même rôle dans le mouvement varié, que la vitesse premièrement définie, dans le mouvement uniforme, pourvu que l'on ne considère que des temps infiniment petits; *et c'est à cause de cette analogie, qu'il était convenable de lui donner le même nom.*

168. *Mouvement rectiligne varié. Accélération.* — Le mouvement varié le plus simple est celui où les changements de la vitesse sont proportionnels aux accroissements correspondants du temps. On le dit *uniformément varié*, ou *uniformément accéléré*, en entendant que l'accroissement de la vitesse peut être positif ou négatif. Nous ne le considérons pour le moment que dans le cas où le point se meut en ligne droite.

Dans un pareil mouvement, on appelle *accélération* l'accroissement positif ou négatif de la vitesse, dans l'unité de temps. Quand elle est donnée on en déduit facilement l'accroissement de vitesse dans un temps quelconque.

Cette notion peut recevoir une extension analogue à celle que nous avons donnée à la vitesse, et s'appliquer à un mouvement varié quelconque.

En effet, désignons par Δv l'accroissement de vitesse que prend le point, à partir d'un instant quelconque, lorsque le temps croît de Δt, et imaginons un mouvement uniformément accéléré dans lequel la vitesse serait la même que

celle du mobile au premier instant, et qui aurait une accélération telle, que la vitesse croîtrait de même de Δv dans le temps Δt; cette accélération moyenne sera mesurée, d'après ce qui précède, par $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, et tendra vers une certaine limite à mesure que Δt tendra vers zéro.

Cette limite est ce que l'on appelle l'*accélération* dans le mouvement proposé, à l'instant que l'on considère. Son expression est

$$\frac{dv}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Et il est facile de voir qu'elle jouera le même rôle dans le mouvement varié en général, que dans le mouvement uniformément accéléré, pourvu que l'on ne considère que des intervalles infiniment petits. En effet, si Δt est infiniment petit, on aura

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} + \varepsilon,$$

$$\Delta v = \frac{dv}{dt}\Delta t + \varepsilon \Delta t.$$

Donc, l'accroissement Δv de la vitesse ne diffère de $\frac{dv}{dt}\Delta t$ que d'une quantité infiniment petite par rapport à Δv, et qui pourra être négligée toutes les fois qu'on ne considérera que des limites de sommes ou de rapports. Donc, dans tous les cas de ce genre, l'accroissement infiniment petit de vitesse pourra être calculé comme si le mouvement était uniformément accéléré, et que l'accélération de ce mouvement fût égale à ce que nous avons appelé l'*accélération* dans le mouvement varié en question.

Remarque. — Il est bon de remarquer que nous avons considéré de deux manières fort différentes un mouvement varié quelconque, comme limite de mouvements successifs,

de durées infiniment petites. Dans un cas, les mouvements élémentaires sont uniformes, dans l'autre ils sont uniformément accélérés.

Les premiers ont, à l'instant commun, le même $\frac{dx}{dt}$ que le proposé, en d'autres termes, la même vitesse, les seconds, le même $\frac{dx}{dt}$ et le même $\frac{d^2x}{dt^2}$, c'est-à-dire même vitesse et même accélération. Les premiers ont, s'il est permis de s'exprimer ainsi, un contact du premier ordre avec le proposé, les seconds, un contact du second ordre. Mais aussi on ne peut, même dans un temps infiniment petit, remplacer le proposé par les mouvements élémentaires du premier genre, que pour calculer les accroissements d'espace; tandis qu'on peut employer les autres pour le calcul de l'accroissement de la vitesse.

CHAPITRE III.

DE L'INERTIE DE LA MATIÈRE.

169. Nous avons admis comme résultat général de l'observation, que lorsqu'un corps, immobile d'abord au milieu du système invariable des objets terrestres, se déplace par rapport à eux, il y a une cause extérieure qui a agi sur lui en ce moment, de sorte que si aucune force n'avait agi, il serait resté indéfiniment dans la position qu'il occupait.

De plus, des expériences variées et mille fois répétées ont constamment montré que lorsque les causes qui ont déplacé ce corps cessent d'agir sur lui, et que les résistances inévitables diminuent de plus en plus, son mouvement tend de plus en plus à devenir rectiligne et uniforme; et l'on a dû en conclure naturellement que si l'on pouvait annuler l'effet des frottements, de l'air ambiant, et autres résistances quelconques, le mouvement du corps serait rigoureusement rectiligne et uniforme.

C'est de l'ensemble des expériences de ce genre que l'on a déduit le principe de l'*inertie* de la matière, qui a été confirmé sans aucune exception par l'accord des conséquences qu'on en a tirées avec les faits résultant d'expériences directes, ou d'observations dans le système du monde: il peut être énoncé de la manière suivante :

Tout point matériel en repos y reste tant qu'il ne survient aucune action extérieure ou force; et s'il se meut sans qu'aucune force lui soit appliquée, son mouvement sera rectiligne et uniforme.

Mais il ne faut pas entendre par là qu'un corps n'entre

pour rien dans la production des forces qui peuvent agir sur lui. L'ensemble des phénomènes naturels montre, au contraire, que ces forces naissent toujours de l'action mutuelle de ce corps et d'autres corps. L'inertie consiste donc en ce qu'un point matériel ne peut changer de lui-même son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, et qu'il faut toujours pour cela l'existence et l'action d'autres points matériels.

170. Nous allons maintenant faire connaître un principe général auquel on a été conduit par une foule d'observations et d'expériences, et qui est vérifié par l'accord constant entre les résultats auxquels conduit son admission, et l'observation directe des phénomènes. Il consiste en ce que :

Si tous les points d'un système, liés ou non les uns avec les autres, ont des vitesses constantes, égales et parallèles, et que l'un d'eux, sans liaison avec les autres, reçoive une certaine vitesse, ou soit sollicité par une certaine force variant d'une manière quelconque, ou même que ces deux conditions soient réunies, son mouvement relativement au système sera le même que si le mouvement primitif commun n'avait point existé, et que le point en question eût reçu la même vitesse et eût été sollicité par la même force, agissant dans la même direction.

On aperçoit facilement par quel genre d'expériences on pourrait reconnaître la vérité de ce principe, en rapportant toujours les positions aux objets immuables à la surface de la terre. On donnerait un mouvement uniforme commun à un système de points, mobiles ou non les uns par rapport aux autres ; on appliquerait à l'un d'eux, libre par rapport aux autres, une force dont on ferait varier la direction et l'intensité ; on lui imprimerait une vitesse arbitraire, et l'on observerait le mouvement relatif de ce point. On répéterait

les mêmes expériences en changeant le mouvement uniforme commun; et l'on reconnaîtrait que le mouvement relatif est tout à fait indépendant du mouvement uniforme commun, et le même que si ce dernier n'existait pas.

Remarque. — La considération du temps est nécessaire dans la production de tout mouvement, parce qu'il faut toujours un temps fini pour que l'action d'une force fasse acquérir à un corps une vitesse finie. Quelquefois on a distingué deux espèces de forces : les unes, que l'on nommait *instantanées*, produisaient des vitesses finies, sans que leur action s'exerçât pendant un intervalle de temps quelconque, si petit qu'on pût le supposer, les autres, que l'on nommait *accélératrices*, avaient besoin d'agir pendant un temps fini pour produire une vitesse finie. Mais, comme toutes les actions sont continues dans la nature, et que les forces instantanées n'ont aucune existence réelle, les géomètres s'accordent généralement à ne plus les admettre dans la science. Il n'en sera jamais question dans ce cours, et nous ne considérerons que les forces continues, c'est-à-dire qui ne produisent une vitesse finie que quand leur action s'est exercée sans discontinuité pendant un temps fini.

Néanmoins, il pourra quelquefois être commode de considérer des vitesses finies comme produites dans un temps assez petit pour que les positions n'aient pas sensiblement changé. Ces forces seront alors très-grandes, et leur valeur, supposée constante, se mesurera comme pour toutes les autres forces. C'est toujours ainsi que nous entendrons les *forces instantanées*, lorsque nous emploierons cette expression pour abréger le discours.

171. Nous admettrons le principe précédent dans toute sa généralité, tout en reconnaissant que, comme toutes les propositions déduites de l'expérience, il ne peut être regardé comme offrant une certitude qui dispense de toute vérifi-

cation. C'est, si l'on veut, une hypothèse extrêmement vraisemblable, qui peut servir de base à une science de raisonnement, mais qui demande à être vérifiée par l'accord de ses conséquences les plus éloignées avec les faits observés

Remarquons comme conséquence très-simple de ce principe, la proposition suivante dont nous ferons bientôt usage :

Si à un instant quelconque un point matériel en mouvement, soumis à l'action d'une force quelconque, est considéré relativement à trois axes se coupant en ce point même, et dont tous les points ont une vitesse constante, la même, en direction et en grandeur, qu'a le point au moment que l'on considère, le mouvement relatif de ce point, par rapport à ces axes, sera identique avec le mouvement absolu qu'il aurait si les axes étaient immobiles, et que le point partant de l'origine sans vitesse fût sollicité par la même force que dans son mouvement relatif.

C'est ce que Galilée a admis lorsqu'il a traité la question du mouvement curviligne des corps pesants.

172. Si la force est de celles qui produisent une vitesse finie dans un temps inappréciable, et cesse immédiatement d'agir, le mouvement relatif sera uniforme; sa vitesse sera celle que la force aurait communiquée au mobile en repos, et il est évident que le point aura par rapport à des axes fixes un mouvement uniforme suivant la direction de la diagonale du parallélogramme construit sur les deux vitesses, et avec une vitesse constante égale à cette diagonale même. Tel sera l'effet d'une vitesse *communiquée* à un point déjà en mouvement. Si ce mouvement n'était pas rectiligne et uniforme, on négligerait l'effet produit par la force continue pendant la durée insensible de l'action de la force instantanée, et on n'en tiendrait compte qu'après la composition des deux vitesses finies.

CHAPITRE IV.

QUELQUES APPLICATIONS DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS

173. *Mouvement produit par une force constante.*—On entend par *force constante* celle qui exerce la même action sur le corps auquel elle est appliquée, quel que soit le mouvement de ce corps. Cela posé, considérons un point matériel ayant d'abord un mouvement rectiligne et uniforme. Si on lui applique une force constante dans le sens de son mouvement, sa vitesse augmentera de quantités égales dans des temps égaux quelconques, puisque, d'après le principe précédent, l'accroissement de vitesse est indépendant de la vitesse précédemment existante. Ainsi, le mouvement rectiligne d'un point sollicité par une force constante, et partant avec une vitesse initiale quelconque, est tel, que la vitesse croît de quantités proportionnelles au temps. On voit de la même manière que si la force était en sens contraire du mouvement initial, la vitesse diminuerait proportionnellement au temps; et à partir de l'instant où elle serait annulée, le mouvement changerait de sens, et la variation de la vitesse serait toujours la même qu'auparavant, dans des temps égaux.

Une force constante produit donc le mouvement que nous avons nommé *uniformément varié*. En désignant par v la vitesse, positive ou négative, du point, pour une valeur quelconque du temps t; par b la vitesse initiale, c'est-à-dire correspondante à $t = 0$; enfin par a l'*accélération* positive ou négative, produite par l'action de la force sur le point matériel, on aura la formule $v = at + b$

dont nous avons démontré la généralité dans la *Science des nombres*, par l'introduction des signes dans la définition de toutes les quantités qui y entrent. Et comme $v = \frac{dx}{dt}$, on aura

$$x = \frac{at^2}{2} + bt + c,$$

c désignant la valeur initiale de x, et déterminant, par conséquent, la position initiale du mobile.

174. Si la force, au lieu d'être constante, augmentait ou diminuait d'une manière continue, on pourrait regarder comme évident que la vitesse ne croîtrait plus de quantités égales dans des temps égaux, comme dans le cas où la force était toujours la même. On conçoit au reste combien il a été facile de vérifier par l'expérience cette induction si naturelle. Et nous en déduisons cette conséquence immédiate, que :

Si un point matériel est animé d'un mouvement uniformément varié, il est nécessairement sollicité par une force constante.

175. *Masse des corps.* — L'expérience montre que la force ne produit pas toujours un mouvement identique quand elle est appliquée à des corps différents. Ce fait donne lieu à une notion nouvelle qui est celle de *masse*.

On dit que deux corps d'espèce quelconque ont même *masse*, lorsque des forces égales produisent des mouvements identiques sur ces corps, libres et partant du repos. Si on lie ensemble deux corps, on en forme un nouveau dont la masse est dite la *somme des masses* des deux autres. L'idée de masses égales conduit à celle de masses dans un rapport quelconque, et les masses de tous les corps peuvent être représentées par des nombres, si on les rapporte à celle d'un volume connu d'une matière déterminée.

On voit par là que des corps formés d'une même substance homogène ont des masses proportionnelles à leurs volumes, et, par conséquent, aux quantités de matière qu'ils renferment. Mais, comme on ne pourrait attacher aucun sens précis à la comparaison des quantités de matière de deux substances différentes, ni surtout en tirer aucunes conséquences relativement aux effets des forces, on n'a dû admettre d'autres caractères distinctifs entre les différents corps et les différentes substances, que ceux qui dépendent de la manière dont ils se comportent sous l'action des forces qui les mettent en mouvement.

La notion de la masse offre donc cette différence essentielle avec celle de la force, qu'elle ne peut s'acquérir que par le mouvement; tandis que la notion de la force peut s'acquérir, soit en produisant un mouvement, soit en l'empêchant de se produire.

176. *Densité.* — On appelle *densité* d'un corps homogène la masse renfermée sous l'unité de volume; elle est, par conséquent, le rapport de la masse renfermée sous un volume quelconque, à ce volume.

Lorsqu'un corps n'est pas homogène, on appelle densité en un quelconque de ses points, la densité moyenne d'une portion du corps, infiniment petite dans tous les sens, dans laquelle se trouve ce point, ou, en d'autres termes, la limite du rapport de la masse renfermée dans cette portion à son volume, quand il tend vers la limite zéro. Cette limite devra être employée de la même manière que la densité dans les corps homogènes, quand il s'agira de calculer la masse d'une portion finie d'un corps non homogène, pourvu qu'on la décompose en éléments infiniment petits dans tous les sens. Et c'est pour cette raison que la dénomination de densité a dû être étendue à cette limite.

177. Si deux points ayant des masses égales partent du

repos, et sont sollicités par des forces égales et parallèles, ils prendront un mouvement identique, et, par conséquent, on ne changera rien à leur état, en supposant qu'ils soient liés invariablement l'un à l'autre, et que leur système soit sollicité par la force double qui est la résultante des deux autres, et, par conséquent, appliquée au centre de gravité des deux points. Il en serait de même pour un nombre quelconque de points, de sorte que si deux masses sont dans le rapport de m à n, et qu'elles soient sollicitées par des forces dans le même rapport, appliquées à leurs centres de gravité respectifs, elles prendront des mouvements identiques, et tous leurs points décriront des droites parallèles.

Si l'une des masses était sollicitée par une force moindre ou plus grande que celle qui résulte de cette proportion, elle aurait évidemment un mouvement différent de l'autre. D'où résulte cette réciproque, que si deux masses inégales ont un même mouvement, les forces qui leur sont appliquées sont proportionnelles à ces masses.

178. *Application de ce qui précède à la pesanteur.* — L'expérience a appris que tous les corps, abandonnés dans le vide à la libre action de la pesanteur, prennent des mouvements identiques, quelles que soient leur grandeur, leur espèce et par conséquent leur masse. On doit conclure de là que *les forces respectives auxquelles tous les corps sont soumis, pendant leur mouvement, par l'action de la pesanteur, ou les poids de ces corps, sont proportionnelles aux masses de ces corps.*

L'expérience a encore fait connaître les deux faits suivants, dont l'un est une conséquence de l'autre, savoir : que les espaces parcourus par un corps qui part du repos, et est abandonné à la libre action de la pesanteur, sont proportionnels aux carrés des temps; et que les vitesses acquises sont proportionnelles aux temps. De l'un ou de

l'autre de ces faits, on conclut, d'après la discussion précédente, que la force à laquelle ce corps est soumis est constamment la même pendant tout le cours de son mouvement.

On peut reconnaître encore que son intensité est la même que lorsque le corps est en repos. En effet, au moyen d'un appareil semblable à celui de la machine d'Atwood, on peut communiquer à un corps un mouvement vertical uniforme. Dans ce cas, la force produite par la pesanteur est détruite, et l'on peut en avoir la mesure exacte par la tension d'un ressort auquel serait suspendu le corps et qui participerait au mouvement vertical. Or l'expérience prouve que cette tension est la même que lorsque le système est en repos; d'où il suit que *le poids d'un corps est le même dans l'état de repos et dans l'état de mouvement.*

Les *masses* des corps étant donc proportionnelles à leurs *poids dans l'état de repos*, les instruments qui servent à mesurer ces poids serviront à déterminer les rapports des masses, et l'on pourra représenter ces dernières quantités par des nombres, en prenant pour unité la masse d'un volume déterminé d'une substance choisie arbitrairement, et prise à une température déterminée. Avant les expériences de Galilée sur la chute des corps, on ne pouvait savoir que les masses étaient proportionnelles aux poids; et il en serait tout autrement si la pesanteur était, par exemple, une force du genre des attractions magnétiques qui ne s'exercent pas sur toutes les substances, et même qui s'exercent inégalement sur celles qui sont soumises à leur influence.

179. La vitesse acquise par les corps pesants tombant librement dans le vide, pendant un temps donné, dépend du lieu où se fait la chute; elle subit de petites variations suivant la latitude et l'élévation au-dessus du niveau de la

mer. Nous ne nous proposons pas ici d'en faire connaître les lois, et nous nous bornerons à donner la valeur de la vitesse acquise par un corps qui tomberait pendant l'unité de temps, dans le vide, à l'Observatoire de Paris.

Pour déterminer d'abord l'unité de temps, nous supposerons le jour moyen partagé en 24 heures, l'heure en 60 minutes, la minute en 60 secondes; et nous prendrons pour unité la seconde, ou la 86400e partie du jour moyen.

Le jour sidéral, ou la durée de la rotation de la terre sur elle-même, est plus court que le jour solaire à cause du mouvement propre du soleil; il n'est que de 86164,09 secondes. Cela posé, si nous désignons par g la vitesse acquise pendant 1 seconde par un corps tombant dans le vide, à l'Observatoire de Paris, nous aurons, d'après des expériences précises dont nous ne parlerons pas ici,

$$g = 9^{m},80896,$$

le mètre étant l'unité de longueur.

180. D'après ce que nous avons vu dans le mouvement uniformément varié, nous aurons, dans le cas d'un corps qui tombe verticalement dans le vide, en supposant la vitesse initiale nulle, prenant l'origine des x au point de départ, et les x positifs dans le sens de la pesanteur,

$$v = gt, \quad x = \frac{gt^2}{2},$$

et, par suite,

$$v^2 = 2gx, \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{2gx}$$

Cette dernière expression s'appelle communément la *vitesse due à la hauteur* x, et réciproquement, x ou $\frac{v^2}{2g}$ s'appelle la *hauteur due à la vitesse* v.

Si le corps est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse a, on aura, en prenant l'origine des x au point

de départ, et les x positifs en sens contraire de la pesanteur,

$$v = a - gt, \quad x = at - \frac{gt^2}{2}.$$

La vitesse deviendra nulle pour $t = \frac{a}{g}$, d'où $x = \frac{a^2}{2g}$. Le mobile monte donc pendant un temps égal à celui qu'il mettrait à acquérir la vitesse initiale a, et l'espace qu'il parcourt en s'élevant, est égal à celui qu'il parcourrait en descendant pendant le même temps sans vitesse initiale.

Le mobile après le temps a redescend, puisque l'expression de la vitesse change de signe, et, d'après ce qui vient d'être dit, il doit se trouver au point de départ avec une vitesse égale à $-a$, après un nouvel intervalle de temps égal à $\frac{a}{g}$. Et, en effet, les formules précédentes, pour $t = \frac{2a}{g}$, donnent

$$v = -a, \quad x = 0.$$

CHAPITRE V.

PRINCIPE DE LA PROPORTIONNALITÉ DE LA VITESSE A LA FORCE

181. Ce principe fondamental consiste en ce que deux forces constantes quelconques qui sollicitent des masses égales pendant un même temps, leur font acquérir des vitesses qui sont entre elles dans le même rapport que les deux forces.

Beaucoup de géomètres ont admis ce principe comme une hypothèse, et ils vérifiaient son exactitude par l'accord entre les résultats des théories fondées sur elle, et des expériences ou des observations directes.

Mais, comme il est une des bases principales de la science, nous croyons devoir montrer comment on peut en reconnaître l'exactitude par des expériences de différente nature, et que l'on peut faire pour autant de valeurs différentes que l'on voudra de la force accélératrice constante; ce qui n'empêchera pas d'ailleurs de faire par la suite les vérifications dont on se contentait ordinairement.

Pour étudier la loi suivant laquelle varie le mouvement d'une même masse, sollicitée successivement par diverses forces constantes, et partant toujours de l'état de repos, entendu comme nous l'avons expliqué une fois pour toutes, on peut faire usage d'appareils analogues à la machine d'Atwood, et qui donnent le moyen de faire varier d'une infinité de manières la force appliquée à une même masse, et de mesurer avec une grande précision la vitesse acquise après l'unité du temps. Il sera facile alors de déterminer

la loi suivant laquelle cette vitesse varie avec la force qui la produit.

Désignons par M la masse de l'un quelconque des poids égaux, primitivement en équilibre sur la machine, et par m la masse du poids additionnel p. Tous les points du système ayant le même mouvement, des masses égales sont sollicitées par des forces égales; ainsi une masse égale à m ne sera plus sollicitée par la force p, mais par la force $p\frac{m}{2M+m}$, ou $\frac{p}{1+2\frac{M}{m}}$, et l'on peut choisir le rapport $\frac{M}{m}$ de manière que la masse m soit sollicitée par une force ayant une valeur quelconque comprise entre 0 et p. Or, en déterminant les vitesses acquises dans chaque cas après une seconde, comme on peut le faire par des procédés très-précis que nous ne pouvons détailler ici, on les trouvera dans le même rapport que les forces, avec d'autant plus d'approximation que l'on aura plus diminué les résistances étrangères.

On peut même s'assurer que la force appliquée à la masse 2M est constante pendant le mouvement. Il suffira de suspendre le poids additionnel au moyen d'un ressort qui en fasse partie, ou qui soit compris dans l'une des masses en équilibre. On reconnaîtra qu'il est toujours également tendu pendant le mouvement, et que par conséquent la force avec laquelle la masse 2M est tirée est constante. Sa valeur indiquée par l'allongement du ressort, étant divisée par $\frac{2M}{m}$, donnera la force appliquée à la masse m, et devra coïncider avec celle que nous avons déjà trouvée, savoir $\frac{p}{1+2\frac{M}{m}}$

182. On pourrait encore diminuer la pesanteur dans un

rapport connu arbitraire, en faisant descendre un corps sur un plan incliné. En effet, si l'on désigne par α l'angle de la verticale avec ce plan, la force appliquée au corps, au lieu d'être p, sera $p \cos \alpha$, et pourra prendre toutes les valeurs depuis o jusqu'à p. On pourra encore déterminer les vitesses acquises après une seconde, et l'on trouvera ces vitesses proportionnelles aux forces, ou du moins cette loi se rapprochera d'autant plus de l'exactitude, que l'on aura diminué davantage les frottements et résistances de toute espèce.

Nous regarderons maintenant ce principe comme démontré, ainsi que les précédents, et l'objet de la science sera de déduire de ces premières données, tirées de l'observation de la nature, toutes les lois du mouvement dans les circonstances les plus compliquées. La conformité que l'on trouvera constamment entre les résultats de l'observation directe des phénomènes, et ceux que le calcul annonce en admettant ces principes, constituera une vérification qui ne laissera aucun doute sur leur exactitude.

COMPARAISON DES FORCES QUI AGISSENT SUR DES MASSES QUELCONQUES.

183. Si l'on applique une force constante p à un corps ayant une masse m, et conçu comme réduit à un point, chaque unité de masse est sollicitée par la force $\frac{p}{m}$. Si l'on conçoit une seconde force constante p' appliquée à une masse m', l'unité de masse de ce nouveau corps est sollicitée par la force $\frac{p'}{m'}$.

Les mouvements de ces deux corps étant évidemment les mêmes que ceux de chacune de leurs parties, et les vitesses acquises au bout du même temps par des masses égales, étant

proportionnelles aux forces qui les produisent; si l'on désigne ces vitesses par v, v', on aura

$$v : v' :: \frac{p}{m} : \frac{p'}{m'}, \quad \text{ou} \quad p : p' :: mv : m'v'.$$

D'où il résulte que *deux forces constantes sont entre elles comme les produits des masses auxquelles elles sont appliquées, par les vitesses qu'elles leur font acquérir dans le même temps*. La proportion précédente peut se mettre sous la forme

$$\frac{p}{p'} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{v}{v'}.$$

Si donc on prend pour unités de leurs espèces respectives, les quantités désignées par p', m', v', on aura

$$p = mv.$$

Ainsi *les forces seront mesurées par le produit de la masse du corps auquel elles sont appliquées, par la vitesse qu'elles lui font acquérir pendant l'unité de temps*; en entendant que l'on a pris pour unité de force celle qui fait acquérir à l'unité de masse, dans l'unité de temps, une vitesse égale à l'unité de longueur.

Cette mesure s'appliquera évidemment aux forces produisant des quantités de mouvement finies dans des temps inappréciables. Si ces forces n'agissent pas avec une intensité constante, c'est à leur valeur moyenne que cette mesure s'appliquera.

184. Si l'on voulait comparer les intensités de deux forces p, p', qui dans des temps différents t, t' auraient fait acquérir des vitesses v, v' aux masses m, m', il faudrait ramener les temps à être égaux, par exemple à l'unité, avant d'y appliquer la proposition précédente. Or, la masse m aurait acquis la vitesse $\frac{v}{t}$ dans le temps 1, et la

masse m', la vitesse $\frac{v'}{t'}$; on aura, par conséquent,

$$p : p' :: \frac{mv}{t} : \frac{m'v'}{t'};$$

et si l'on suppose que p', m', v', t' soient tous égaux à l'unité, on aura

$$p = \frac{mv}{t},$$

l'unité de force étant la même que dans le cas précédent.

On est convenu d'appeler *quantité de mouvement d'un corps* le produit de sa masse par sa vitesse. On peut donc dire *qu'une force constante quelconque est mesurée par la quantité de mouvement qu'elle produit dans l'unité de temps.*

185. *Unités de force et de masse.* — Jusqu'ici nous n'avons fixé que les unités de longueur et de temps, qui sont respectivement le mètre, et la seconde. Nous avons laissé indéterminées celles qui se rapportent aux forces et aux masses; seulement nous les avons liées par la condition que l'unité de force, appliquée à l'unité de masse pendant l'unité de temps, lui fit acquérir une vitesse égale à l'unité. Nous conviendrons maintenant de prendre pour unité de force le kilogramme, c'est-à-dire le poids d'un décimètre cube d'eau distillée prise à la température du maximum de densité, et considéré à l'Observatoire de Paris. Voyons ce que sera, d'après cela, l'unité de masse, c'est-à-dire la masse qui, sollicitée pendant une seconde par une force constante égale au poids de 1 kilogramme, acquerrait une vitesse de 1 mètre par seconde.

Or, la masse de 1 décimètre cube d'eau, sollicitée par une force égale à 1 kilogramme, c'est-à-dire par son poids à l'Observatoire, acquiert la vitesse g dans une seconde; donc la masse d'un nombre g de décimètres cubes d'eau, solli-

citée par la même force de 1 kilogramme, acquerrait une vitesse égale à l'unité : elle est donc l'unité de masse.

Ainsi, en prenant la seconde pour unité de temps, le mètre pour unité de longueur, et le kilogramme pour unité de force, la masse prise pour unité doit être celle de 9,80896 décimètres cubes d'eau distillée prise à la température de 4 degrés.

Les masses pourront toujours être remplacées par des poids ; ce qui est plus commode, puisque ce sont les poids qui se mesurent immédiatement avec les instruments. On observera pour cela que si P désigne le poids du corps dont la masse est m, on aura $P = mg$, puisque g unités de force expriment le poids de l'unité de masse ; on en tire $m = \frac{P}{g}$; mais il ne faudra pas oublier que tout se rapporte au système d'unités que nous venons d'établir.

186. *Poids spécifique.* — On appelle *densité* d'une substance homogène la masse qu'elle renferme sous l'unité de volume ; le *poids spécifique* est le poids de cette masse. Il résulte de là, que si l'on designe par D la densité d'une substance, son poids spécifique sera Dg ; et si l'on considère une portion de cette substance dont le volume soit désigné par V, la masse par M, et le poids par P, on aura

$$M = VD, \quad P = VDg.$$

On voit par là que si l'on formait la Table des densités et celle des poids spécifiques d'une série de substances homogènes, les nombres de la seconde ne différeraient de leurs correspondants de la première que par le facteur constant g.

Le plus ordinairement, dans ces Tables, on prend pour terme de comparaison l'eau distillée, prise à la température du maximum de densité ; et l'on représente par l'unité, dans l'une la densité, dans l'autre le poids spécifique de

l'eau. Dans cette supposition, les deux Tables seraient composées des mêmes nombres, et on se borne à l'une des deux dans tous les ouvrages de Physique. On peut l'appeler, indifféremment *Table des densités* ou *Table des poids spécifiques*. Mais il faut bien se souvenir que les poids spécifiques des substances, tels qu'ils doivent être substitués dans les formules de la Mécanique, s'obtiennent en multipliant les nombres donnés par la Table, par le poids spécifique de l'eau qui est 1000, puisque le mètre cube est l'unité de volume, et le kilogramme l'unité de force. Et de même, pour avoir les densités de ces substances, il faudra multiplier les nombres correspondants de la Table par $\frac{1000}{g}$.

PRINCIPE DE L'ÉGALITÉ DE L'ACTION ET DE LA RÉACTION DANS LE MOUVEMENT. — FORCE D'INERTIE.

187. Considérons un point matériel soumis à l'action d'une force constante, qui lui fait parcourir une ligne droite d'un mouvement uniformément accéléré. On peut remplacer cette force, quelle qu'elle soit, par un corps qui pousserait ou tirerait le point, de manière à lui faire suivre le même mouvement; auquel cas la force produite par sa liaison au corps serait la même que la première. Or, si l'on réalise cet état de choses en poussant ou en tirant un corps quelconque au moyen d'un ressort dont on puisse négliger la masse, on reconnaîtra qu'il arrive toujours un état permanent de tension. Il résultera de là, en ne tenant pas compte de la force nécessaire pour produire l'accélération du ressort dont la masse est considérée comme insensible, que ce ressort est sollicité à chaque instant par deux forces en équilibre, et par suite égales et contraires. Donc l'action exercée à l'une des extrémités du ressort, et qui produit l'accélération, est toujours accompagnée d'une autre action égale et contraire appliquée à l'extrémité qui

est liée au corps. Cette dernière force est nommée *réaction* du corps, et les expériences que nous venons d'indiquer démontrent que *l'action est constamment égale à la réaction*, dans tout mouvement où la force est constante; et par conséquent aussi dans le cas où elle est variable, puisqu'on peut toujours la considérer comme constante dans un intervalle de temps infiniment petit. C'est cette réaction qu'on appelle *force d'inertie*.

Le principe étant établi pour tous les cas où la force est produite par des liaisons matérielles, on l'étend naturellement au cas même où l'on n'aperçoit aucun intermédiaire entre les deux points qui agissent l'un sur l'autre; action qui est toujours dirigée suivant la droite qui les joint. Cette extension est confirmée par l'accord entre les phénomènes observés, et les calculs fondés sur cette hypothèse; et d'ailleurs elle peut être démontrée expérimentalement toutes les fois que les corps entre lesquels a lieu l'action mutuelle peuvent être liés l'un à l'autre de manière à former un système rigide libre : on reconnaît par l'immobilité de ce système que les deux forces sont contraires et égales.

Nous admettrons donc ce principe général, que toutes les fois qu'un point matériel produit une action sur un autre, ce dernier exerce toujours une action égale et contraire sur le premier; de sorte que, si ces points venaient à être liés invariablement, les deux actions se détruiraient exactement.

CHAPITRE VI.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT RECTILIGNE

EXPRESSION DE LA FORCE DANS UN MOUVEMENT RECTILIGNE QUELCONQUE

188. Nous avons vu que deux forces constantes sont entre elles comme les quantités de mouvement qu'elles ont communiquées dans le même temps. D'où il est résulté qu'une force constante peut être mesurée par la quantité de mouvement qu'elle produit dans l'unité de temps, en prenant pour unité de force celle qui, dans l'unité de temps, fait acquérir à l'unité de masse une vitesse égale à l'unité. Voyons comment on peut ramener à ce cas celui d'une force qui varie à chaque instant suivant une loi arbitraire. La question consiste à déterminer la vitesse qu'elle ferait acquérir à l'unité de masse pendant l'unité de temps, si elle conservait l'intensité qu'elle a à l'instant que l'on considère.

Supposons donc un mouvement rectiligne quelconque; soient, v la vitesse du point mobile auquel nous supposerons une masse égale à l'unité, x sa distance à l'origine, t le temps compté à partir d'une époque quelconque, désignons par φ la force variable qui sollicite le point à chaque instant, c'est-à-dire son rapport à l'unité de force, qui est mesuré par la vitesse qu'elle ferait acquérir pendant l'unité de temps au mobile en question, dont la masse est égale à l'unité.

Si la force était constante, il suffirait de diviser la vitesse qu'elle communiquerait au point dans un temps quel-

conque, par ce temps, et l'on aurait la vitesse communiquée dans l'unité de temps. Mais, dans le cas actuel, si la force est φ à un certain instant, elle sera augmentée d'une certaine quantité $\Delta\varphi$ après le temps Δt, et l'accroissement Δv de la vitesse ne sera pas dû à la force φ, mais pourrait être produit par une force comprise entre φ et $\varphi+\Delta\varphi$, et qui agirait avec une intensité constante pendant le même temps Δt. Cette force intermédiaire φ' sera égale à $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, c'est-à-dire que cette expression mesure la vitesse qu'elle communiquerait au point dans l'unité de temps.

Mais l'équation rigoureusement exacte $\varphi'=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ayant lieu quel que soit l'intervalle de temps Δt, et φ' se rapprochant indéfiniment de φ à mesure que Δt tend vers zéro, puisque alors $\Delta\varphi$ tend aussi vers zéro, il en résulte, en prenant les limites des deux membres de l'équation,

$$\varphi=\frac{dv}{dt}.$$

Telle est la mesure exacte de la force appliquée à l'unité de masse, dans un mouvement rectiligne quelconque. Elle est de même signe que dv, de sorte qu'en employant cette formule, on regarde la force comme positive quand elle tend à augmenter la vitesse, et comme négative quand elle tend à la diminuer; mais l'expression de celle-ci est $\frac{dx}{dt}$, et est positive quand le mouvement a lieu dans le sens des x positifs : donc la force sera positive quand elle agira dans ce même sens, puisqu'elle rendra $\frac{dx}{dt}$ ou v plus grand en valeur algébrique; elle sera négative dans le sens contraire.

Si dans l'expression de φ on remplace v par $\frac{dx}{dt}$, on

obtient

$$\varphi = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

189. Si maintenant on considère un point dont la masse soit m, la force qui le sollicite sera mesurée par $m\frac{dv}{dt}$, puisque le point qui aurait le même mouvement et une masse égale à l'unité, serait sollicité par la force $\frac{dv}{dt}$, et que nous avons vu que dans des mouvements identiques, les forces sont entre elles comme les masses.

On est convenu d'appeler *force motrice* celle qui est appliquée à une masse donnée quelconque, sa mesure est

$$m\frac{dv}{dt}, \quad \text{ou} \quad m\frac{d^2x}{dt^2};$$

et l'on appelle *force accélératrice* celle qui, dans le mouvement que l'on considère, sollicite l'unité de masse, elle a pour mesure

$$\frac{dv}{dt}, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Cette expression, considérée dans le mouvement en lui-même, en mesure l'*accélération* positive ou négative.

USAGE DES FORMULES GÉNÉRALES DU MOUVEMENT VARIÉ.

190. Ces formules sont

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

ou encore, en remettant pour dt sa valeur tirée de la première,

$$\varphi = \frac{v dv}{dx}.$$

Examinons les différentes questions auxquelles elles peuvent donner lieu.

1° Supposons que l'on donne $x = F(t)$, on obtiendra l'expression de la vitesse et de la force par de simples différentiations par rapport à t.

2° Soit $v = F(t)$, on aura

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{dF(t)}{dt},$$

on connaîtra donc la force accélératrice.

On connaîtra la position du point à chaque instant en intégrant l'équation $\frac{dx}{dt} = F(t)$, qui donne

$$x = \int F(t)\,dt.$$

La constante relative à cette intégration, se déterminera par la position initiale du point.

3° Soit $\varphi = F(t)$.

On connaîtra la vitesse par la formule

$$v = \int F(t)\,dt,$$

et l'on déterminera la constante d'après la valeur initiale de v. Soit ainsi $v = f(t)$; on aura la valeur de x au moyen de la formule suivante.

$$x = \int f(t)\,dt,$$

et la constante introduite par cette nouvelle intégration dépendra de la position initiale du point.

4° Soit $v = F(x)$, on en conclura

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad \text{d'où} \quad t = \int \frac{dx}{F(x)};$$

la constante se déterminera d'après la position initiale du

point, et l'on aura ainsi une équation finie entre x et t. La force φ ou $\frac{v\,dv}{dx}$ sera égale à $F'(x)F(x)$.

5° Soit $\varphi = F(x)$; si l'on remplace φ par $\frac{v\,dv}{dx}$, on aura

$$\frac{v\,dv}{dx} = F(x); \quad \text{d'où} \quad v\,dv = F(x)dx,$$

et, en intégrant,

$$v^2 = 2\int F(x)dx = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

On parviendrait encore à ce résultat en remplaçant φ par $\frac{d^2x}{dt^2}$, on aurait alors

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x).$$

Si l'on multiplie les deux membres par $2\frac{dx}{dt}$, il vient

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 2F(x)\frac{dx}{dt},$$

et les deux membres de cette équation sont des dérivées, par rapport à t, le premier, de $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, et le second, de $2\int F(x)dx$; on aura donc

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\int fF(x)dx = v^2,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation précédemment obtenue.

La constante renfermée dans $\int$ se détermine par les valeurs initiales de x et v. On connaît ainsi la vitesse en un point quelconque du mouvement, et il reste à trouver une équation entre x et t. Désignons $2\int F(x)\,dx$ par $f(x)$; nous

aurons

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{f(x)}, \quad \text{d'où} \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

et la constante sera déterminée par la valeur initiale de x.

6° Soit enfin $\varphi = \mathrm{F}(v)$, on aura alors

$$\frac{dv}{dt} = \mathrm{F}(v), \quad \text{d'où} \quad t = \int \frac{dv}{\mathrm{F}(v)},$$

la constante se déterminera par la valeur initiale de v.

Si l'on peut résoudre cette dernière équation par rapport à v, on aura

$$v = f(t) = \frac{dx}{dt}, \quad \text{d'où} \quad x = \int f(t)dt.$$

Dans le cas contraire, on remplacera φ par $\frac{v\,dv}{dx}$, et l'on aura

$$\frac{v\,dv}{dx} = \mathrm{F}(v), \quad \text{d'où} \quad x = \int \frac{v\,dv}{\mathrm{F}(v)}.$$

Si l'on peut effectuer cette intégration, on aura une équation finie entre v et x; et comme on en a déjà une entre t et v, l'élimination de v en fera connaître une autre en x et t.

Telles sont les différentes questions auxquelles peuvent donner lieu les équations du mouvement rectiligne varié. Leur solution dépend toujours ou de différentiations, ou d'intégrations du genre des quadratures. Nous renvoyons aux Traités spéciaux pour l'application de ces formules à des exemples.

CHAPITRE VII.

DU MOUVEMENT GÉNÉRAL D'UN POINT LIBRE.

191. Nous allons maintenant nous occuper du mouvement le plus général d'un point libre sollicité par des forces quelconques, qui sont toujours réductibles à une seule, dont la direction et l'intensité peuvent varier arbitrairement avec le temps et la position du point.

La première question que nous allons nous proposer, est de déterminer le mouvement que suivrait le point, si, à un certain instant, la force continue qui lui est appliquée cessait subitement d'agir. Nous savons, par la loi d'inertie, qu'il sera rectiligne et uniforme; il ne reste donc à connaître que sa direction et sa vitesse.

Pour cela, concevons trois axes rectangulaires, de directions constantes, et dont l'origine ait précisément ce mouvement que nous voulons déterminer. Si la force n'agit plus, le mobile coïncidera constamment avec cette origine. Mais si elle ne cessait pas son action, c'est-à-dire si le point continuait son mouvement réel, le mouvement qu'il prendrait par rapport aux axes mobiles serait, d'après un principe général admis précédemment, celui même qui aurait lieu par rapport à des axes fixes, si on plaçait le mobile sans vitesse à leur point de rencontre, et qu'on lui appliquât la force même qui le sollicite dans son mouvement réel. Or l'espace qu'il parcourrait ainsi dans un temps infiniment petit du premier ordre, serait un infiniment petit du second, tandis que celui que parcourrait en même temps l'origine mobile, serait du premier. Si donc, sur la direc-

tion rectiligne que suit le point après la suppression de la force, on prend une quantité infiniment petite du premier ordre, son extrémité sera à une distance infiniment petite du second ordre, du point de sa trajectoire; d'où il suit d'abord que cette direction rectiligne ne peut être que la tangente à cette trajectoire. De plus, l'espace parcouru par le point sur sa trajectoire ne différant que d'un infiniment petit du second ordre de celui que parcourt l'origine pendant le même temps, la vitesse dans le mouvement réel, à l'instant considéré, est la même que celle de l'origine.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si à un instant quelconque la force qui produit le mouvement d'un point libre cessait d'agir, ce point se mouvrait alors uniformément suivant la tangente à la trajectoire, avec la vitesse qu'il avait à ce même instant.

192. *Valeur et direction de la force d'après le mouvement produit.* — Considérons une position quelconque M (*fig.* 22) d'un point dont la masse est m, et dont les coordonnées x, y, z sont des fonctions déterminées du temps t.

Fig. 22.

Si la force qui agit sur lui cessait à cet instant son action, il se mouvrait sur la tangente MT avec la vitesse v qu'il a en M. Si donc nous supposons trois axes X', Y', Z' constamment parallèles aux premiers, et dont l'origine A' se meuve sur MT avec la vitesse constante v, le mouvement du point m, par rapport à ces axes, sera identique à celui qui aurait lieu par rapport à des axes immobiles, si le

point m était placé sans vitesse à l'origine, et sollicité par la même force qui agit sur lui.

La trajectoire relative aux axes mobiles partira de A', passera en m, et sa tangente en A' sera la première direction de la sécante A'm. On peut regarder l'arc infiniment petit de cette courbe comme se confondant avec cette sécante, et la force comme constante de grandeur et de direction, pendant le temps infiniment petit θ. Cette direction est celle de la droite décrite, et le mouvement sur cette droite sera uniformément accéléré.

Les projections de cette sécante seront les différences des coordonnées de A' et m. Ces dernières seront exprimées par les formules

$$x + \frac{dx}{dt}\theta + \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\right)\frac{\theta^2}{2},$$

$$y + \frac{dy}{dt}\theta + \left(\frac{d^2y}{dt^2} + 6\right)\frac{\theta^2}{2},$$

$$z + \frac{dz}{dt}\theta + \left(\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma\right)\frac{\theta^2}{2},$$

α, 6, γ étant infiniment petits; celles de l'origine mobile A' seront exprimées par les deux premiers termes de ces formules, puisque les composantes de sa vitesse sont $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; de sorte que les projections de la sécante décrite d'un mouvement uniformément accéléré, et que l'on appelle la *déviation* du point, seront

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\right)\frac{\theta^2}{2}, \quad \left(\frac{d^2y}{dt^2} + 6\right)\frac{\theta^2}{2}, \quad \left(\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma\right)\frac{\theta^2}{2}.$$

Elles seront proportionnelles aux cosinus des angles formés par la sécante avec les axes et seront du signe même de ces cosinus, en considérant le sens de A' vers m, c'est-à-dire le sens même de la force. On aura la longueur de la

sécante en prenant la racine de la somme des carrés de ces projections, et, d'après la théorie du mouvement uniformément accéléré, en la divisant par $\frac{\theta^2}{2}$, on aurait l'expression de la force *accélératrice*. Elle contiendra les quantités infiniment petites α, 6, γ; mais, à mesure que θ diminuera, les suppositions relatives à la direction et à l'intensité de la force prendront un caractère de fixité de plus en plus grand, et, en passant à la limite, on aura pour direction de la force, la tangente à la trajectoire relative; au point M son intensité φ aura pour expression

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

et les cosinus des angles que sa direction fait avec les axes seront proportionnels à $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, et respectivement de mêmes signes. Ces cosinus seront donc représentés en grandeur et en signes par

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{1}{\varphi}\frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{1}{\varphi}\frac{d^2z}{dt^2},$$

et les composantes de la force seront exprimées en grandeur et en signe par

$$\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Telle est l'expression des composantes de la force qui sollicite l'unité de masse dans le mouvement d'un point libre, dont x, y, z sont les coordonnées fonctions du temps. Pour que le mouvement, quel qu'il soit, reste le même quand le mobile aura une masse égale à m, il faudra multiplier la force, et, par suite, ses composantes par m. Si donc on désigne par X, Y, Z les composantes de la force appliquée au point dont la masse est m, et qu'on nomme la

force motrice, les coordonnées x, y, z de ce point seront des fonctions du temps, telles que l'on ait à chaque instant

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z.$$

Ce sont les équations différentielles du mouvement d'un point libre.

193. *Usage des équations du mouvement d'un point libre.* — Ces équations donnent le moyen de ramener au calcul toutes les questions qui peuvent se présenter sur le mouvement d'un point. Le cas le plus simple serait celui où l'on donnerait x, y, z en fonction de t; ou, plus généralement, trois équations finies entre x, y, z, t. En les différentiant une fois par rapport à t, on connaîtrait les composantes de la vitesse du mobile. Une seconde différentiation ferait connaître les composantes de la force accélératrice, et, par conséquent, cette force elle-même en grandeur et en direction. Enfin l'élimination de t, entre les trois équations données, ferait connaître les deux équations de la trajectoire.

Mais les données de la question sont, en général, moins simples. Elles devront toujours fournir trois conditions, puisqu'il y a quatre variables x, y, z, t, dont une seule est indépendante : mais si l'on pouvait reconnaître *à priori* que la trajectoire est plane, on prendrait deux axes de coordonnées dans ce plan, et il n'y aurait plus que trois variables, savoir : le temps t et les deux coordonnées, quelles qu'elles soient, du mobile.

Le cas le plus difficile est généralement celui où la force est donnée. On connaît alors X, Y, Z en fonction de x, y, z, t, et les équations du mouvement sont de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2}=F(x,y,z,t),\quad \frac{d^2y}{dt^2}=F_1(x,y,z,t),\quad \frac{d^2z}{dt^2}=F_2(x,y,z,t).$$

Si l'on peut intégrer le système de ces trois équations différentielles du second ordre, on parviendra à trois équations entre x, y, z, t et six constantes arbitraires.

Ces constantes se détermineront d'après les circonstances initiales du mouvement.

On observera, pour cela, que le mouvement du point n'est pas déterminé par la seule connaissance de la force qui agit sur lui. Il faut encore connaître la position où il se trouve à un certain instant, celui par exemple à partir duquel on commence à compter le temps; et, de plus, la grandeur et la direction de sa vitesse à cet instant. C'est en cela que consiste ce qu'on appelle l'*état initial du point*, et l'on voit qu'il renferme six données nécessaires et suffisantes, les trois coordonnées du point et les trois composantes de sa vitesse.

Or il est facile, au moyen de ces données, de déterminer les six constantes introduites par l'intégration. En effet, les équations intégrales, ainsi que toutes celles qu'on en déduirait par la différentiation, ayant lieu pour toute valeur de t, seront satisfaites si l'on y fait $t=0$. Pour cette valeur de t, on connaît, par hypothèse, les valeurs de $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. En les substituant dans les équations intégrales et leurs dérivées premières, dans lesquelles on aura fait $t=0$, on aura six équations qui ne renfermeront d'inconnues que les six constantes, lesquelles, par conséquent, seront déterminées.

Ayant ainsi trois équations entre x, y, z, t, on rentre dans le premier cas que nous avons examiné.

COMPOSANTES DE LA FORCE ACCÉLÉRATRICE SUIVANT LA TANGENTE ET LA NORMALE.

194. Il est souvent utile de décomposer la force suivant la tangente et une normale à la trajectoire. Désignons par T

et N ces deux composantes rapportées à l'unité de masse. La première s'obtiendra en projetant sur la tangente les trois composantes parallèles aux axes, ce qui donnera

$$T = \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{ds} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{ds}.$$

Or, en différentiant l'équation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

on trouve

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt},$$

d'où

$$T = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Connaissant la résultante et une des deux composantes, on aura pour l'autre

$$N = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \frac{d^2z}{dt^2} - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}.$$

On on a trouvé dans la Géométrie que le rayon de courbure R d'une courbe quelconque a pour expression, quelle que soit la variable choisie comme indépendante,

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}},$$

d'où résulte

$$N = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{R} = \frac{v^2}{R}.$$

Il ne reste plus qu'à reconnaître suivant laquelle des normales à la courbe cette composante est dirigée.

Or elle est dans le plan qui contient la composante tan-

gentielle et la résultante; et les cosinus des angles que ces directions font avec les axes sont proportionnels respectivement à

$$dx,\ dy,\ dz \quad \text{et} \quad d^2x,\ d^2y,\ d^2z.$$

Soit $Ax + By + Cz = 1$ l'équation d'un plan quelconque; pour qu'il soit parallèle à ces deux directions il faudra que l'on ait

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0,$$
$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0,$$

et, en exprimant qu'il passe au point donné, on aura le plan qui renferme les trois forces. Or ces équations sont précisément celles qui déterminent le plan osculateur d'une courbe quelconque. D'où il résulte que, *dans le mouvement d'un point libre, la force est toujours située dans le plan osculateur de la trajectoire, ainsi que ses composantes, tangentielle et normale.*

195. On peut arriver très-simplement, et sans calcul, aux résultats précédents.

En effet, la ligne $A'm$ (*fig.* 22, p. 260) étant décrite pendant le temps infiniment petit θ, par l'action de la force accélératrice φ, la valeur de celle-ci sera égale à $\frac{2A'm}{\theta^2}$, et, si l'on abaisse mP perpendiculaire sur la tangente, la force φ et ses composantes seront entre elles comme les trois côtés du triangle $A'mP$; elles sont dirigées l'une de P vers m, l'autre de A' vers P, et, par conséquent,

$$T = \frac{2A'P}{\theta^2}, \quad N = \frac{2Pm}{\theta^2},$$

en prenant les limites de ces rapports. Or on a

$$R = \frac{\overline{Mm}^2}{2Pm} \quad \text{et} \quad Mm = v\theta,$$

donc

$$N = \frac{v^2}{R}.$$

Maintenant A'P est égal à MP — MA', et MP ne diffère de l'arc Mm que d'un infiniment petit du troisième ordre, qui peut être négligé devant A'P qui est du second. Or l'arc de la trajectoire étant considéré comme fonction du temps, on aura

$$Mm = \frac{ds}{dt}\theta + \left(\frac{d^2s}{dt^2} + \delta\right)\frac{\theta^2}{2},$$

et, comme $MA' = \frac{ds}{dt}\theta$, il en résultera

$$A'P = \left(\frac{d^2s}{dt^2} + \delta\right)\frac{\theta^2}{2},$$

expression qui sera positive ou négative en même temps que $\frac{d^2s}{dt^2}$, c'est-à-dire suivant que la vitesse $\frac{ds}{dt}$ sera croissante ou décroissante. Multipliant par $\frac{2}{\theta^2}$ et passant à la limite on trouvera

$$T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

Quant à la direction de la force, elle est la limite de la direction de mA', et, par conséquent, est comprise dans le plan limite du plan MA'm, qui est, comme on le sait, le plan osculateur de la courbe au point M. La composante normale y est donc elle-même, puisque la résultante et la composante tangentielle s'y trouvent. Elle est dirigée du point M vers le centre de courbure, comme étant la limite de la direction Pm, et c'est pour cela qu'on lui donne quelquefois le nom de *force centripète*. On retombe ainsi sur les résultats déjà obtenus.

Si la masse du point, au lieu d'être l'unité, était égale

à m, les deux composantes seraient $\frac{mv^2}{R}$ et $m\frac{d^2s}{dt^2}$ ou $m\frac{dv}{dt}$

196. *Force d'inertie. Ses composantes.* — Nous avons vu que toutes les fois qu'une action s'exerçait sur un corps, celui-ci exerçait toujours en sens contraire une action égale, que l'on nomme *réaction* ou *force d'inertie*. Si l'action s'exerce par la pression ou la traction d'un autre corps, ou d'un appareil matériel quelconque, c'est sur les points matériels en contact que s'exerce la réaction. Si elle provient d'un corps à distance, c'est toujours sur ce corps que la réaction s'opère; et elle est encore égale et directement opposée à l'action qui a lieu sur le premier.

Cela posé, considérons un point libre, ayant une masse m et décrivant une trajectoire quelconque sous l'action d'une certaine force, que nous nous représenterons comme produite par la traction d'un fil ou par la pression d'un autre corps; la force d'inertie sera appliquée à ce fil ou ce corps extérieur, au point même de l'espace où se trouve le mobile, et pourra être décomposée soit en trois forces parallèles aux axes, égales à $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$, soit en deux forces, l'une tangentielle, l'autre normale à la trajectoire, et respectivement opposées aux composantes de la force appliquée au mobile ; la première, estimée par rapport à la direction du mouvement, sera $-m\frac{d^2s}{dt^2}$, la seconde aura pour valeur $\frac{mv^2}{R}$, sera située dans le plan osculateur de la trajectoire, et dirigée du côté opposé au centre de courbure; de sorte que si l'on concevait qu'elle agit sur un point sans vitesse pendant un temps fini, ce point se mouvrait suivant la normale en s'éloignant de ce centre. C'est pour cette raison qu'on lui a donné le nom de *force centrifuge*.

On fait quelquefois de faux raisonnements relativement

à la force centrifuge, parce qu'on ne se rappelle pas assez qu'elle n'est pas appliquée au point en mouvement, mais au corps en contact avec lui, et qui, par sa pression ou sa traction, déterminerait ce mouvement. Si l'on supposait le mouvement produit autrement que par la pression d'un corps, la réaction, comme nous l'avons dit, ne serait plus appliquée à un point en contact avec celui que l'on considère, et la dénomination de *force centrifuge* ne semble plus assez naturelle. Par exemple, en regardant le mouvement de la terre comme produit par l'attraction du soleil, la réaction de la terre est appliquée au soleil; sa composante normale l'est donc aussi, et l'on serait obligé de dire que la force centrifuge produite par la terre est appliquée au soleil. On ferait peut-être mieux de supprimer cette dénomination qui obscurcit quelquefois les choses, et d'employer le mot *réaction*, qui rappelle toujours à quel point la force et ses composantes sont appliquées.

CHAPITRE VIII.

APPLICATION DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES A QUELQUES CAS PARTICULIERS.

Nous allons employer ici le moyen de découverte que nous avons indiqué dans la première Partie de cet Ouvrage. Nous partirons de certaines conditions déterminées, et nous chercherons à en tirer des conséquences sans avoir aucun but spécial. Si nous arrivons ainsi à quelque proposition importante, nous l'inscrirons à sa place dans la science.

197. *Mouvement produit par une force constamment normale à la trajectoire.* — La condition connue pour que deux droites soient perpendiculaires, donne immédiatement, dans le cas actuel, l'équation

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Or le double du premier membre est la dérivée de

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

ou de v^2, v désignant toujours la vitesse; il en résulte donc que la vitesse est constante.

On peut donc énoncer cette proposition générale :

Lorsque la force qui sollicite un point matériel est toujours normale à sa trajectoire, le mouvement de ce point est uniforme, et réciproquement.

On se trouve dans les conditions de cette question, quand

on considère un point assujetti à se mouvoir sur une courbe ou une surface fixe qui ne produit aucun frottement, et qu'on suppose qu'il n'y ait aucune force autre que la résistance de la courbe et de la surface, le mobile est alors sollicité par une force constamment normale à sa trajectoire, et son mouvement sera par conséquent uniforme.

Remarque. — On aurait pu parvenir à cette conséquence au moyen des formules qui expriment la composante tangentielle et la composante normale de la force appliquée au mobile.

En effet, si la résultante est toujours normale, la composante tangentielle $\frac{d^2s}{dt^2}$ est toujours nulle ; et par conséquent $\frac{ds}{dt}$, ou la vitesse, a une valeur constante et réciproquement.

198. *Du mouvement produit par une force qui passe par un point fixe.* — Lorsqu'un point matériel est sollicité par une force dont la direction passe par un point fixe, que l'on prendra, pour plus de simplicité, comme origine des coordonnées, les cosinus des angles formés par la direction de cette force avec les axes, doivent être proportionnels aux coordonnées x, y, z du point, et, comme ils sont proportionnels aux composantes $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ de la force accélératrice, on aura

$$(1) \qquad \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{z},$$

d'où l'on tire

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \quad x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

et, en intégrant par rapport à t,

$$(2)\quad y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=\mathrm{C},\quad z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}=\mathrm{C}',\quad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=\mathrm{C}'',$$

C, C′, C″ étant des constantes arbitraires.

Si l'on multiplie la première de ces équations par x, la seconde par y, la troisième par z, et qu'on les ajoute, on trouvera l'équation suivante, entre les coordonnées du point à un instant quelconque :

$$\mathrm{C}x+\mathrm{C}'y+\mathrm{C}''z=0.$$

Le point ne sort donc pas d'un plan passant par l'origine, comme on pouvait le reconnaître *à priori*, en observant qu'aucune cause ne tend à faire sortir le point du plan mené par le centre d'action et la direction de la vitesse initiale.

Pour interpréter les équations (2), soient r la projection du rayon vecteur mené de l'origine au point mobile, sur le plan XY, et θ l'angle qu'elle forme avec l'axe des x. Nous supposerons que les angles croissent de l'axe des x positifs vers l'axe des y positifs, de sorte qu'en se plaçant dans l'axe des z positifs, on voit s'exécuter de gauche à droite le mouvement du rayon qui décrirait les angles croissants. Nous regarderons les aires décrites par un rayon vecteur, comme croissant dans ce même sens ; et il en sera de même pour chacun des autres axes, relativement aux deux autres plans.

Cela posé, on aura l'équation générale

$$\tang\theta=\frac{y}{x},\quad \text{d'où}\quad \frac{\frac{d\theta}{dt}}{\cos^2\theta}=\frac{x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}}{x^2},$$

et, par conséquent,

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=r^2\frac{d\theta}{dt}=2\frac{d\lambda''}{dt},$$

en désignant par λ'' l'aire décrite par la projection r du rayon vecteur du mobile.

Si l'on désigne de même par λ' et λ les aires décrites par les projections de ce rayon vecteur sur les plans ZX et ZY, les équations (2) donneront

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{C}{2},\quad \frac{d\lambda'}{dt}=\frac{C'}{2},\quad \frac{d\lambda''}{dt}=\frac{C''}{2},$$

d'où

$$(3)\qquad \lambda=\frac{1}{2}Ct,\quad \lambda'=\frac{1}{2}C't,\quad \lambda''=\frac{1}{2}C''t,$$

en supposant que les aires commencent avec le temps t.

Ces équations montrent que les aires décrites, à partir de cet instant, par les projections du rayon vecteur du mobile, croissent proportionnellement au temps. Et comme le mouvement du point s'effectue dans un plan, il s'ensuit que les aires décrites par le rayon vecteur du mobile dans ce plan, sont aussi proportionnelles au temps. La valeur de ces aires peut s'exprimer facilement, en observant que toute aire plane est égale à la racine carrée de la somme des carrés de ses projections sur trois plans rectangulaires. On aura donc, pour l'expression de ces aires,

$$\frac{1}{2}t\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}.$$

Réciproquement, si les aires décrites par les projections du rayon vecteur sont proportionnelles au temps, la direction de la force qui sollicite le mobile passe constamment par l'origine. Car alors les équations (3) auront lieu, et, par suite, les équations (2), qui, différentiées, donneront les équations (1); or ces équations expriment que les cosinus des angles que fait avec les axes la direction de la force, et ceux qui se rapportent à la droite menée de l'origine au point (x, y, z) sont proportionnels, et que, par conséquent, ces deux droites se confondent.

C'est dans ces deux propositions réciproques que consiste le *principe des aires* pour un point matériel.

Si le point était sollicité par des forces dirigées vers deux centres fixes, les équations (1) ne seraient plus satisfaites; mais la première aurait encore lieu en prenant pour axe des z la droite qui passe par les deux centres. En effet, la résultante des forces auxquelles le point est soumis, coupant constamment l'axe des z, ses composantes parallèles aux axes des x et des y sont proportionnelles à ces deux coordonnées; d'où résulte l'équation

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0;$$

et, par conséquent, *le principe des aires a lieu, dans ce cas, pour tout plan perpendiculaire à la droite qui passe par les deux centres, le centre des aires étant pris sur cette droite.*

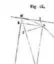
Il est évident qu'il en serait de même si, au lieu de deux centres, on en avait un nombre quelconque situé sur une même droite.

Observation. — Cet important *principe des aires* a été découvert par Newton et exposé dans le livre des *Principes*. Sa démonstration n'est pas fondée sur les équations générales du mouvement, qui n'étaient pas connues, et ce n'est pas en les combinant au hasard, comme nous l'avons fait, qu'il y est parvenu. Son génie lui a fait apercevoir que, la force qui tirait le point dans la direction du rayon vecteur ne pouvant déranger son mouvement que parallèlement à ce rayon, le triangle décrit par le rayon vecteur devait avoir la même aire que si cette force n'agissait pas, et le principe est tout entier dans cette première vue.

199. *Expression remarquable de la force dirigée vers un centre fixe, au moyen des éléments de la trajectoire.* —

Cette formule infinitésimale est une des plus importantes découvertes de Newton. Pour y parvenir, soit, à une époque quelconque, M (*fig.* 23) la position du mobile sollicité

Fig. 23.



vers le point fixe O, et N sa position après le temps infiniment petit θ; NI parallèle à MO, et terminée à la tangente à la trajectoire en M; enfin NP perpendiculaire à OM. Désignant la force par φ, on aura

$$\mathrm{NI} = \frac{\varphi\theta^2}{2} \quad \text{et} \quad c\theta = 2\overline{\mathrm{ONM}} = \mathrm{OM}.\mathrm{NP} = r\mathrm{NP},$$

d'où

$$\mathrm{NI} = \frac{\varphi r^2.\overline{\mathrm{NP}}^2}{2c^2},$$

et, par suite,

$$\varphi = \frac{2c^2}{r^2}\,\frac{\mathrm{NI}}{\overline{\mathrm{NP}}^2}.$$

Telle est la formule infinitésimale donnée par Newton dans son livre des *Principes*, en observant toutefois qu'il n'a pas cherché à déterminer la valeur de la constante qui est représentée ici par $2c^2$. Il transforme cette expression de différentes manières.

Ainsi, en abaissant de N la perpendiculaire NK sur la normale, et désignant par ω l'angle de cette dernière avec

MO, on aura

$$\mathrm{NI}\cos\omega = \mathrm{MK} = \frac{\overline{\mathrm{NM}}^2}{2\mathrm{R}},$$

R étant le rayon de rourbure de la trajectoire. De là résulte, en désignant par p la perpendiculaire OQ abaissée de O sur la tangente,

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2}\,\frac{\overline{\mathrm{NM}}^2}{\mathrm{R}\cos\omega.\overline{\mathrm{NP}}} = \frac{c^2}{r^2\mathrm{R}\cos^3\omega} = \frac{c^2}{p^2\mathrm{R}\cos\omega} = \frac{c^2 r}{\mathrm{R}p^3}$$

200. Ces formules de Newton conduisent à une expression differentielle très-simple de la force centrale φ.

Prenons, en effet, la formule

$$\varphi = \frac{c^2 r}{\mathrm{R}p^3},$$

et substituons-y à p et R leurs expressions differentielles en coordonnées polaires r, θ, qui sont

$$p = r\cos\omega = r^2\frac{d\theta}{ds},$$

$$\mathrm{R} = \frac{\dfrac{ds^3}{d\theta^3}}{r^2 + 2\dfrac{dr^2}{d\theta^2} - r\dfrac{d^2 r}{d\theta^2}} = \frac{\dfrac{ds^3}{d\theta^3}}{r^3\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right)}.$$

Nous obtiendrons ainsi

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right),$$

formule importante dont nous ferons usage par la suite, et qu'on déduit ordinairement des équations générales du mouvement.

201. *Mouvement produit par une force perpendiculaire au rayon vecteur.* — Considérons encore le cas où la force serait perpendiculaire à une ligne passant par un point fixe. C'est ce qui aura lieu, par exemple, pour un point assujetti à rester sur une droite qui tourne suivant une loi quelconque autour d'un de ses points, et dont la pression normale est la seule force qui sollicite le point.

La condition donnée sera alors exprimée par l'équation

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Faisons

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

nous aurons, par différentiation,

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=r\frac{dr}{dt}.$$

Différentiant de nouveau, il vient

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+y\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+z\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$
$$=r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

équation qui, en vertu de la première, se réduit à

$$r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Nommant ω l'angle décrit par le rayon vecteur, on sait qu'on aura

$$ds^2=dr^2+r^2d\omega^2.$$

Reportant cette valeur de ds^2 dans l'équation précédente, elle devient

$$\frac{d^2r}{dt^2}=r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

Cette équation a lieu quelle que soit la directrice de la surface conique décrite par le rayon vecteur.

Si l'on donnait la loi du mouvement angulaire du rayon vecteur par une équation entre ω et t, il serait possible, en combinant cette équation avec la précédente, de déterminer à chaque instant la grandeur du rayon vecteur et l'angle qu'il a décrit. Cette grandeur du rayon vecteur ne dépendant pas de la nature de la surface conique décrite, il s'ensuit que si l'on développe celle-ci sur un plan, la courbe décrite par le point mobile sera la même après le développement, quelle que soit la directrice du cône, et sera, par conséquent, la courbe même que l'on aurait obtenue en faisant mouvoir le rayon vecteur dans un plan, en observant la même loi entre ω et t.

DU MOUVEMENT PRODUIT PAR UNE FORCE DONT LES COMPOSANTES PARALLÈLES AUX AXES, SONT LES DÉRIVÉES PARTIELLES D'UNE MÊME FONCTION DE x, y, z.

202. Si l'on désigne par X, Y, Z les composantes de la force motrice qui sollicite un point matériel dont la masse est m, les équations générales de son mouvement seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\text{X},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\text{Y},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\text{Z}.$$

Si l'on ajoute ces équations, après avoir multiplié la première par $2\frac{dx}{dt}$, la seconde par $2\frac{dy}{dt}$, et la troisième par $2\frac{dz}{dt}$, il vient

$$\left(2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)m$$
$$=2\left(\text{X}\frac{dx}{dt}+\text{Y}\frac{dy}{dt}+\text{Z}\frac{dz}{dt}\right),$$

et, en observant que l'équation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v^2$$

donne

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d.v^2}{dt},$$

on aura

$$(1) \qquad m\frac{d.v^2}{dt} = 2\left(\mathrm{X}\frac{dx}{dt} + \mathrm{Y}\frac{dy}{dt} + \mathrm{Z}\frac{dz}{dt}\right).$$

Et comme X, Y, Z sont les dérivées partielles d'une même fonction $\mathrm{F}(x, y, z)$, on aura

$$\mathrm{X}\frac{dx}{dt} + \mathrm{Y}\frac{dy}{dt} + \mathrm{Z}\frac{dz}{dt} = \frac{d\mathrm{F}(x, y, z)}{dt},$$

et l'équation précédente, intégrée entre deux limites quelconques, donnera

$$(2) \qquad mv^2 - mk^2 = 2\mathrm{F}(x, y, z) - 2\mathrm{F}(a, b, c),$$

a, b, c, k désignant les coordonnées du point et sa vitesse, à la première limite.

On a donné le nom de *force vive d'un point* au produit de sa masse par le carré de sa vitesse.

On voit donc que, dans le cas où $\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz$ est la différentielle d'une certaine fonction de x, y, z considérées comme variables indépendantes, si un point matériel est soumis à l'action de forces dont les composantes totales parallèles aux axes soient X, Y, Z, l'accroissement de sa force vive, en passant d'un point à un autre quelconque, pourra s'exprimer au moyen des coordonnées de ces deux points, quelles que soient la direction et la grandeur de sa vitesse au premier point, quelque temps qu'il mette pour

parvenir au second, et quelque ligne qu'il décrive entre les deux.

On peut dire plus généralement, d'après l'équation (2), que si le mobile part d'un point quelconque de la surface dont l'équation serait $F(x, y, z) = C$, avec une vitesse connue k dans une direction arbitraire, lorsqu'il arrivera en un point de la surface ayant pour équation $F(x, y, z) = C'$, sa vitesse v peut être determinée de grandeur d'après ces seules données, et indépendamment du temps employé, de la ligne décrite, et du nombre de fois que ce point traverse successivement la seconde surface.

L'équation générale de ces surfaces remarquables étant $F(x, y, z) = c$, c désignant une constante arbitraire, elles auront la même équation différentielle

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Cette équation exprime que les deux directions dont les angles avec les axes ont des cosinus proportionnels respectivement à X, Y, Z, et dx, dy, dz, sont perpendiculaires l'une sur l'autre. D'où l'on conclut que la force dont les composantes sont X, Y, Z est normale à celle de ces surfaces qui passe par le point que l'on considère.

Ainsi les surfaces qui jouissent de la propriété que nous avons démontrée sont perpendiculaires à la force qui solliciterait le mobile placé en un quelconque de leurs points; de sorte que, si elles étaient résistantes, ce mobile serait en équilibre, en quelque point de ces surfaces qu'il fût posé.

Un leur donne le nom de *surfaces de niveau*.

Si la fonction $F(x, y, z)$ ne peut se réduire à $\frac{0}{0}$ pour des valeurs réelles et finies de x, y, z, deux surfaces de niveau ne pourront évidemment avoir aucun point commun. Dans le cas contraire, comme on peut le voir dans un Mémoire de M. Bertrand, le point materiel n'aura pas toujours la même vitesse en revenant à une même surface de niveau;

il faudra, pour cela, qu'il ait traversé un nombre pair de fois chacune des surfaces de niveau par lesquelles il passera avant de revenir sur celle d'où il était parti.

203. Si, outre les forces dont les composantes totales X, Y, Z sont les dérivées partielles d'une fonction des variables x, y, z, considérées comme indépendantes, il y en a d'autres, perpendiculaires à la trajectoire, on parviendra de même à l'équation (2).

Ainsi, la proposition précédente a lieu pour un point assujetti à se mouvoir sur une courbe ou une surface fixe, et sollicité en outre par des forces telles, que

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$$

soit une différentielle exacte par rapport à x, y, z, ce qui n'aurait pas lieu s'il y avait un frottement ou la résistance d'un milieu; car ces forces ne seraient même pas des fonctions donnees de x, y, z.

204. L'expression $\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$ est une différentielle exacte toutes les fois que les forces qui agissent sur le point sont dirigées vers des centres fixes, et que leurs intensités ne dépendent que de la distance du point à ces divers centres.

En effet, soient a, b, c les coordonnées constantes de l'un quelconque de ces centres; x, y, z les coordonnées variables du mobile, r leur distance, et R une fonction de r qui exprime la force qui agit sur le point donné suivant la droite qui le joint au centre que l'on considère. Les composantes de cette force seront

$$\mathrm{R}\frac{a-x}{r},\quad \mathrm{R}\frac{b-y}{r},\quad \mathrm{R}\frac{c-z}{r},$$

si elle est attractive : il suffirait de les changer de signe si la force était répulsive; ce que l'on pourrait effectuer en

changeant seulement R de signe. Les termes qui proviendront de cette force dans l'expression $X dx + Y dy + Z dz$ seront donc, dans le premier cas,

$$R\left[\frac{(a-x)dx+(b-y)dy+(c-z)dz}{r}\right].$$

Or, on a

$$(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2=r^2,$$

d'où

$$(a-x)dx+(b-y)dy+(c-z)dz=-r dr,$$

ce qui réduit l'expression précédente à $-R dr$. Elle devrait être changée en $+R dr$ dans le cas d'une force répulsive.

Si l'on fait le même calcul pour les forces R', R'',..., relatives aux autres centres fixes, on trouvera

$$X dx + Y dy + Z dz = \mp R dr \mp R' dr' \mp R'' dr'' + \ldots,$$

ce qui est une différentielle exacte relativement aux variables indépendantes x, y, z, puisque R est une fonction de r, R' de r', etc.

On aura donc

$$m(v^2-k^2)=\mp\int_{r_0}^{r} R\,dr \mp \int_{r'_0}^{r'} R'\,dr' \mp \ldots,$$

$r_0, r'_0, \ldots$, étant les valeurs de $r, r', \ldots$, correspondantes à la première position. D'où l'on voit que l'accroissement du carré de la vitesse est égal à la somme des accroissements qui auraient lieu si chacune des forces agissait seule sur le mobile, pendant qu'il passe de l'une des positions à l'autre.

205. Si le point était sollicité par une force constamment perpendiculaire à un plan fixe, et dépendant uniquement de la distance à ce plan, les mêmes conséquences auraient lieu, parce que ce n'est, à proprement parler, que le cas par-

ticulier où un centre serait transporté à l'infini, dans une direction déterminée. Mais il est facile de faire directement le calcul qui s'y rapporte.

En prenant ce plan pour celui des x et y, les équations générales deviendront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{F}(z),$$

d'où

$$v^2 - k^2 = 2\int_{z_0}^{z} \mathrm{F}(z)\,dz.$$

Si la fonction F est constante, par exemple s'il s'agit de la pesanteur à la surface de la terre, et qu'on prenne l'axe des z en sens contraire de la pesanteur, on aura

$$\mathrm{Z} = -g$$

et, par suite,

$$v^2 - k^2 = 2g(h - z),$$

en désignant par h la valeur de z correspondante à la vitesse k. Les surfaces dont l'équation générale était $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$, sont ici des plans horizontaux, et l'on voit qu'un point matériel libre, ou assujetti à se mouvoir sur une courbe ou une surface fixe, et qui part d'un point quelconque d'un plan horizontal donné, avec une certaine vitesse, parviendra à un plan horizontal quelconque avec une vitesse qui ne dépendra nullement de la courbe qu'il aura suivie pour y arriver, mais seulement de la distance de son point de départ à ce plan.

CHAPITRE IX.

MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE COURBE MATÉRIELLE.

206. D'après le principe de l'inertie, le mouvement rectiligne et uniforme d'un point, quel qu'il soit, même nul, ne peut être modifié que par une force étrangère, de quelque source qu'elle provienne; que ce soit d'une action à distance ou au contact, du choc d'autres points, ou de la résistance d'une courbe ou d'une surface matérielle, sur laquelle il est obligé de rester. Si ces différentes forces pouvaient être connues en grandeur et en direction, la manière qui compose le point serait dérangée de son mouvement rectiligne et uniforme, par ces forces seules, et l'on retomberait dans le cas précédent d'un point libre sollicité par des forces données.

Nous allons nous occuper d'abord du mouvement d'un point assujetti à rester sur une courbe fixe qui ne donne lieu à aucun frottement, et, par conséquent, ne peut détruire ni produire que des forces normales; nous supposerons en outre que le point est sollicité par des forces extérieures dont la résultante est connue.

Soient

$$F(x,y,z)=0, \quad F_1(x,y,z)=0$$

les équations de la courbe donnée, N la force normale inconnue produite sur l'unité de masse par la résistance de la courbe, et λ, μ, ν les angles qu'elle fait avec les axes; le seul effet de la courbe sur le point, étant de produire cette force, on peut faire abstraction de la courbe si l'on introduit cette force; en la réunissant à celles qui sont données,

le point pourra donc être considéré comme libre, et les équations générales de son mouvement seront, en désignant par X, Y, Z les composantes de la force accélératrice,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\lambda, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\mu, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\nu.$$

La direction déterminée par les angles λ, μ, ν étant perpendiculaire à la tangente, on aura

$$dx\cos\lambda + dy\cos\mu + dz\cos\nu = 0,$$

et, de plus,

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

On a donc sept équations entre les huit quantités $x, y, z, \lambda, \mu, \nu$, N, t; et il sera toujours possible d'exprimer les sept premières en fonction de t. Quand on y sera parvenu, tout ce qui se rapporte au mouvement du point sera déterminé.

Lorsque l'on a

$$X dx + Y dy + Z dz = d.\varphi(x, y, z),$$

les équations précédentes donnent

$$\frac{dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z}{dt^2} = d.\varphi(x, y, z),$$

et, en intégrant,

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2\varphi(x, y, z) + C = v^2.$$

La constante C se déterminera par la valeur de la vitesse v au point de départ. D'ailleurs, les équations de la courbe, résolues par rapport à x et y, donneront

$$x = f(z), \quad y = f_1(z)$$

L'équation précédente deviendra donc

$$\frac{dz^2}{dt^2}\left\{1 + [f'(z)]^2 + [f'_1(z)]^2\right\} = 2\varphi[f(z), f_1(z), z] + C;$$

d'où

$$dt = dz\,\psi(z),$$

$\psi(z)$ désignant une fonction connue de z; on tirera de là

$$t = \int dz\,\psi(z) + C',$$

C' étant déterminé par la valeur initiale de z. On connaîtra donc ainsi z en fonction de t, et, par suite, x et y le seront d'après les équations de la courbe.

En appliquant ces calculs au cas où la courbe est un cercle vertical, on aura à faire une intégration qui exigera l'emploi des séries. Quand le mouvement sera oscillatoire, il sera celui d'un pendule simple. On en trouvera le détail dans tous les Traités de Mécanique. Il y a une courbe qui donne un résultat remarquable, c'est la cycloïde placée de manière que son axe soit vertical. On reconnaît facilement que, dans ce cas, les oscillations ont la même durée, quel que soit le point de la courbe d'où parte le mobile sans vitesse initiale. Cette propriété avait fait penser à mesurer le temps au moyen d'un pendule simple dont l'extrémité décrirait des arcs de cycloïde. Mais un pendule simple n'est pas réalisable et offrirait d'ailleurs de graves inconvénients, par les résistances et par la construction même des appareils. C'est pour cela qu'on y a renoncé et qu'on n'emploie que le pendule circulaire; et ce n'est pas un pendule simple qu'on cherche à réaliser, c'est au contraire un corps d'une masse assez considérable, et dont les oscillations suivent les mêmes lois que celles du pendule simple, comme nous le verrons plus tard. Ces calculs, au reste, ne sont pas indispensables pour la construction des pendules qui servent à mesurer le temps, et qui se règlent sur le mouvement diurne des astres.

CHAPITRE X.

DU MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE SURFACE MATÉRIELLE

207. En supposant que cette surface ne puisse faire naître aucun frottement, son action ne peut consister qu'à produire sur le point une force normale, qui peut avoir l'un quelconque des deux sens, à partir du point sur la normale à la surface. Désignons cette force par N, par λ, μ, ν les angles que sa direction fait avec les axes, et supposons que le point ait une masse égale à l'unité, les équations du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\lambda, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\mu, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\nu,$$

et si $F = 0$ est l'équation de la surface, et qu'on pose

$$V = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},$$

on aura

$$\cos\lambda = V\frac{dF}{dx}, \quad \cos\mu = V\frac{dF}{dy}, \quad \cos\nu = V\frac{dF}{dz}.$$

Le double signe de V correspond aux deux sens de la normale, et le calcul fera connaître en chaque point le signe qui conviendra.

Si l'on substitue dans les premières équations les valeurs

de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, on aura

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = X + NV\dfrac{dF}{dx}, \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + NV\dfrac{dF}{dy}, \\ \qquad\qquad \dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + NV\dfrac{dF}{dz}. \end{array} \right.$$

Éliminant N entre ces trois équations, on aura deux équations qui, jointes à $F(x, y, z) = 0$, détermineront x, y, z en fonction de t; et toutes les circonstances du mouvement en résulteront.

Ces calculs, en général impraticables, se simplifient quand on a

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d\varphi(x, y, z),$$

et, par suite,

$$v^2 = 2\varphi(x, y, z) + C = \frac{ds^2}{dt^2},$$

C désignant une constante arbitraire, déterminée par l'état initial.

En effet, les équations (1) donnent immédiatement les deux suivantes :

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} dx\dfrac{d^2y}{dt^2} - dy\dfrac{d^2x}{dt^2} = Y\,dx - X\,dy + NV\left(\dfrac{dF}{dy}dx - \dfrac{dF}{dx}dy\right), \\ dx\dfrac{d^2z}{dt^2} - dz\dfrac{d^2x}{dt^2} = Z\,dx - X\,dz + NV\left(\dfrac{dF}{dz}dx - \dfrac{dF}{dx}dz\right). \end{array} \right.$$

Or, en différentiant, par rapport à une variable quelconque, l'identité

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}},$$

on trouve

$$d.\frac{dy}{dx} = \frac{dx\frac{d^2y}{dt^2} - dy\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

d'où

$$dx\frac{d^2y}{dt^2} - dy\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 d.\frac{dy}{dx} = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d.\frac{dy}{dx},$$

et de même

$$dx\frac{d^2z}{dt^2} - dz\frac{d^2x}{dt^2} = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d.\frac{dz}{dx}.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (2), et remplaçant v^2 par $2\varphi(x, y, z) + C$, puis éliminant entre elles N, on aura une équation différentielle entre x, y, z, où le temps n'entrera pas, et qui, conjointement avec $F(x, y, z) = 0$, déterminera la trajectoire. Connaissant y et z en fonction de x, et $\frac{ds}{dt}$ en fonction de x, y, z, on parviendra facilement à une équation de la formule $dt = \psi(x)dx$, d'où l'on déduira x en fonction de t, et, par suite, toutes les circonstances du mouvement.

208. *Pression exercée sur la surface.* — La composante normale de la résultante de toutes les forces appliquées au mobile, en y comprenant l'action de la surface, est dans le plan osculateur de la trajectoire, et égale à $\frac{v^2}{R}$. Cette dernière force est donc la résultante de la force produite par la surface, qui est normale à la surface et, par suite, à la trajectoire, et de la composante Q normale à la trajectoire, de la force extérieure qui agit sur le mobile. Par suite la force produite par la surface est la résultante de $\frac{v^2}{R}$ et de la force opposée à Q. Reste à connaître le plan osculateur, qui

renferme la force $\frac{v^2}{R}$. Si, pour cela, on désigne par θ l'angle du plan osculateur avec la normale à la surface, et par ψ celui de la force Q avec la même normale, on aura la proportion

$$\frac{v^2}{R} : Q :: \sin\psi : \sin\theta.$$

Cette relation déterminera la direction du plan osculateur quand on connaîtra v, R, Q, ψ. Dans le cas particulier où l'on aurait $Q = 0$, il en résulterait $\theta = 0$, et le plan osculateur serait le plan normal à la surface. Ce cas est celui où la force extérieure est nulle, ou tangente à la trajectoire : il comprend donc celui où il y aurait frottement sur la surface, ou une résistance de milieu. Dans ces divers cas, le plan osculateur de la trajectoire étant constamment normal à la surface, cette ligne est la plus courte que l'on puisse mener sur la surface entre deux quelconques de ses points.

On peut reconnaître directement que lorsque la force extérieure est nulle ou dirigée suivant la tangente à la trajectoire, le plan osculateur de cette courbe est normal à la surface. En effet, ce plan doit renfermer la tangente à la trajectoire et la résultante totale, c'est-à-dire une des composantes et la resultante : il renferme donc l'autre composante, qui est la normale à la surface, et, par conséquent, il est lui-même normal à la surface.

Nous renvoyons aux Traités spéciaux pour les applications de la méthode générale à des surfaces particulières. Ces calculs offrent encore plus de difficulté que ceux qui se rapportent aux courbes fixes.

CHAPITRE XI.

DU MOUVEMENT RELATIF D'UN POINT.

209. Les principes précédents et toutes les conséquences que nous en avons déduites, concernent le mouvement rapporté à un système immuable dont les diverses parties conservent les mêmes situations les unes par rapport aux autres, lors même qu'elles ne seraient pas liées invariablement entre elles.

Lorsque nous avons reconnu la présence d'une force accompagnant le déplacement d'un point, ce déplacement était relatif; lorsque nous avons démontré, par exemple, qu'un point qui décrivait un cercle d'un mouvement uniforme était sollicité par une force constante dirigée vers le centre, il s'agissait d'un cercle relatif et d'un mouvement relatif. La force centrifuge qui en résultait si le cercle était matériel, pressait ce cercle, lié au système, par suite du mouvement relatif qui était le seul auquel les équations s'appliquaient. Cette conséquence reconnue expérimentalement, et autres semblables, ne pourraient donc être invoquées pour prouver l'existence d'un prétendu mouvement absolu, dont on ne peut même donner une définition.

Nous allons maintenant supposer que le système par rapport auquel on considère le mouvement d'un point, est rigide, et en mouvement par rapport au système fondamental dont les points, liés ou non les uns avec les autres, conservent indéfiniment les mêmes positions relatives, et auquel on rapportera tous les mouvements. Pour la clarté et la brièveté du discours, on pourra nommer ces derniers

mouvements absolus, et appeler *relatifs* ceux qui seront rapportés au système rigide en mouvement. Pour plus de commodité, nous rapporterons les positions relatives du point à trois axes rectangulaires liés invariablement au système mobile, de sorte que la position de ce point sera déterminée à chaque instant dans le système par ses coordonnées relatives à ces axes; et le tout sera rapporté à trois axes que nous appellerons *fixes*, en entendant toujours par là qu'ils sont liés invariablement au système fondamental auquel tous les mouvements sont rapportés, et relativement auquel tous les principes généraux sont admis.

210. Le problème que nous nous proposons peut alors être énoncé en ces termes :

Le mouvement d'un système rigide étant déterminé, trouver le mouvement relatif d'un point dont on donne l'état initial et les forces par lesquelles il est sollicité.

Et cette question peut être envisagée sous la forme suivante :

Déterminer par rapport à des axes fixes un mouvement qui soit identique au mouvement du point en question par rapport aux axes mobiles.

Newton est le premier qui ait résolu cette question, qu'il s'était proposée à l'occasion du mouvement des planètes autour du Soleil. Ce grand géomètre, après avoir créé la théorie du mouvement produit par l'action attractive ou répulsive d'un centre fixe, a bien compris qu'elle n'était pas immédiatement applicable au mouvement des planètes, si le Soleil n'était pas immobile. Et il ne pouvait le supposer immobile après avoir établi le système de l'attraction universelle. Il a donc été obligé de tenir compte du dérangement produit sur le Soleil par l'action des planètes. Et alors en se bornant au système d'une seule planète et du Soleil, il s'est posé le problème suivant :

Connaissant les forces qui sollicitent deux points libres, trouver le mouvement de l'un par rapport à des axes qui sont transportés parallèlement à eux-mêmes et passent constamment par l'autre point.

Pour ramener ce mouvement relatif à un mouvement absolu, et n'avoir plus qu'à appliquer sa belle théorie des forces dirigées vers un centre fixe, il a posé un principe général que nous ferons connaître lorsque nous parlerons de la grande découverte de l'attraction universelle; nous nous bornerons ici à montrer comment les théories précédentes résolvent immédiatement la question du mouvement relatif.

CHAPITRE XII.

MOUVEMENT RELATIF À DES AXES QUI SE MEUVENT SANS CHANGER DE DIRECTION.

211. Soient x, y, z les coordonnées d'un point mobile M, par rapport à des axes fixes, auxquels sont constamment parallèles les axes mobiles; x', y', z' les coordonnées du même point par rapport à ces derniers, et a, b, c celles de l'origine mobile A. On aura les équations

$$(1) \qquad x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'.$$

D'où

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} + \frac{dx'}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{db}{dt} + \frac{dy'}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dc}{dt} + \frac{dz'}{dt},$$

$$(3) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2a}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2b}{dt^2} + \frac{d^2y'}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2c}{dt^2} + \frac{d^2z'}{dt^2}.$$

Et si l'on construisait à chaque instant par rapport à des axes fixes un point M' dont les coordonnées seraient égales à x', y', z', ce point aurait un mouvement absolu identique au mouvement relatif du mobile donné.

Les positions initiales étant données, ainsi que les composantes des vitesses de l'origine et du point donné, on connaît les valeurs initiales de $x, y, z, a, b, c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$, et par suite, celles de $x', y', z', \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$, qui constituent l'état initial du point M'. Ces valeurs

seront

$$x' = x - a,\quad y' = y - b,\quad z' = z - c,$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{da}{dt},\quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{db}{dt},\quad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dc}{dt}.$$

On voit par là que *la vitesse initiale de M', ou la vitesse relative, est la résultante de la vitesse initiale de M et de la vitesse initiale de A, prise en sens contraire.*

C'est ce qu'il est facile d'établir géométriquement, comme nous l'avons fait dans l'*Introduction du Cours de Mécanique*.

Les équations (3) donnent

$$(4)\quad \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2a}{dt^2},\quad \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2b}{dt^2},\quad \frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2c}{dt^2}.$$

Or, les seconds membres de ces équations sont connus. En effet, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ sont les composantes de la force accélératrice appliquée au point M; ce sont donc des fonctions connues de x, y, z, t.

Quant à $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{d^2b}{dt^2}$, $\frac{d^2c}{dt^2}$, il y a deux cas à considérer. Si l'on donne le mouvement de l'origine A, ce sont des fonctions connues de t, et les seconds membres des équations (4) sont des fonctions connues de x, y, z, t, et, par suite, de x', y', z', t'.

Mais si l'on connaît seulement la force accélératrice qui donnerait à un point le mouvement même de A, $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{d^2b}{dt^2}$, $\frac{d^2c}{dt^2}$ seront les composantes de cette force, et, par suite, des fonctions connues qui pourront renfermer a, b, c, t. Mais a, b, c pourront se déterminer séparément, puisque l'on connaît l'état initial de l'origine A et la force accélératrice qui lui est appliquée; on connaîtra donc le

mouvement de ce point, et l'on rentre dans le premier cas, où $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{d^2b}{dt^2}$, $\frac{d^2c}{dt^2}$ sont des fonctions connues de t. Les seconds membres des équations (4) deviennent donc encore des fonctions de x', y', z', t; en les intégrant, on aura x', y', z' en fonction de t, et le problème sera résolu.

212. Les équations (4) font connaître immédiatement la force qu'il faudrait appliquer à un point, pour qu'il eût un mouvement absolu identique au mouvement relatif cherché

En effet, dans ce mouvement absolu les coordonnées du point ont les mêmes valeurs que x', y', z'; les premiers membres de (4) sont donc les composantes de la force accélératrice dans ce mouvement, c'est-à-dire de la force accélératrice relative. Or les premiers termes des seconds membres sont les composantes de la force donnée, les seconds termes changés de signe sont les composantes de la force accélératrice qui donnerait à un point libre le mouvement même de l'origine; les équations (4) expriment donc la proposition suivante :

La force accélératrice relative est la résultante de la force donnée et de la force égale et opposée à celle qui produirait le mouvement de l'origine.

L'état initial du mobile dans ce mouvement absolu se déterminerait comme nous l'avons indiqué.

Cette proposition peut encore se déduire de considérations géométriques, comme nous le ferons voir tout à l'heure dans le cas général.

CHAPITRE XIII.

MOUVEMENT D'UN POINT PAR RAPPORT A UN SYSTÈME RIGIDE ANIMÉ D'UN MOUVEMENT CONNU QUELCONQUE.

213. Lorsque le système rigide n'avait qu'un mouvement de translation, nous avons pu supposer indifféremment que ce mouvement était connu, ou que l'on donnait seulement les forces capables de produire sur un point matériel le mouvement même d'un point du système mobile. Dans le cas actuel, nous supposons connu le mouvement de ce système, parce que le problème de sa détermination d'après des forces données serait trop compliqué, et d'ailleurs nous n'avons pas encore fait connaître le moyen de le mettre en équation. En conséquence, nous prenons comme donné le mouvement de trois axes liés au système; de sorte que les coordonnées de leur origine, ainsi que les angles formés par ces axes avec les axes *fixes* de coordonnées, seront des fonctions connues du temps; et la question a toujours pour objet de déterminer en fonction du temps les coordonnées par rapport aux axes mobiles, du point donné qui est sollicité par une force absolue donnée.

Les équations qui lient les coordonnées du point par rapport aux axes fixes et aux axes mobiles sont

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \xi + ax' + by' + cz', \\ y = \eta + a'x' + b'y' + c'z', \\ z = \zeta + a''x' + b''y' + c''z'. \end{cases}$$

Comme nous l'avons dit, $\xi, \eta, \zeta, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ sont des fonctions données du temps, et il s'agit de trouver

x', y', z' en fonction du temps. Pour obtenir des équations propres à déterminer ces trois quantités, il suffit de remarquer que l'on donne les expressions de $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, qui sont les composantes de la force accélératrice agissant sur le mobile; ces expressions peuvent dépendre du temps t et des coordonnées x, y, z qui s'exprimeront en x', y', z', au moyen des équations (1). On voit donc qu'en différentiant deux fois ces dernières, on aura trois équations différentielles du second ordre entre x', y', z', t. En les intégrant, on aura x', y', z' en fonction de t et de six constantes arbitraires qui se détermineront au moyen des valeurs initiales de $x', y', z', \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$; et ces valeurs seront connues au moyen des équations (1) et de leurs premières dérivées, puisqu'on connaît les valeurs initiales de x, y, z, $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Le problème sera donc complétement résolu.

La première différentiation opérée sur les équations (1) donne

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \left(\frac{d\xi}{dt} + x'\frac{da}{dt} + y'\frac{db}{dt} + z'\frac{dc}{dt}\right) \\
&\quad + \left(a\frac{dx'}{dt} + b\frac{dy'}{dt} + c\frac{dz'}{dt}\right), \\
\frac{dy}{dt} &= \left(\frac{d\eta}{dt} + x'\frac{da'}{dt} + y'\frac{db'}{dt} + z'\frac{dc'}{dt}\right) \\
&\quad + \left(a'\frac{dx'}{dt} + b'\frac{dy'}{dt} + c'\frac{dz'}{dt}\right), \\
\frac{dz}{dt} &= \left(\frac{d\zeta}{dt} + x'\frac{da''}{dt} + y'\frac{db''}{dt} + z'\frac{dc''}{dt}\right) \\
&\quad + \left(a''\frac{dx'}{dt} + b''\frac{dy'}{dt} + c''\frac{dz'}{dt}\right).
\end{aligned}\right.$$

Les premières parties des seconds membres sont les va-

leurs qu'auraient $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ si x', y', z' étaient constants; ce sont donc les composantes parallèles à x, y, z de la vitesse absolue du point du système qui coïncide avec le mobile, dans la position quelconque où on le considère: les secondes parties sont les composantes de la vitesse relative, parallèlement aux axes des x, y, z. Les équations (2) expriment donc que la vitesse absolue du point est la résultante de sa vitesse relative, et de celle du point du système qui coïncide avec le mobile dans la position que l'on considère. Et, par conséquent :

La vitesse relative du mobile est la résultante de sa vitesse absolue et de la vitesse, prise en sens contraire, du point du système qui coïncide avec la position que l'on considère du mobile.

C'est ce que l'on peut facilement établir sans calcul. (Voyez *Cours de Mécanique*.)

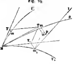
214 Les valeurs de $\frac{d^2x'}{dt^2}$, $\frac{d^2y'}{dt^2}$, $\frac{d^2z'}{dt^2}$ que fournissent ces équations (1) différentiées deux fois, et qui sont les composantes de la force accélératrice relative, présentent une décomposition de cette force, beaucoup plus compliquée que dans le cas où le système n'a qu'un simple mouvement de translation. Cette décomposition offre de l'intérêt, bien qu'elle ne dispense pas des calculs que nous venons d'indiquer; c'est M. Coriolis qui l'a fait connaître, et l'a deduite de la forme des expressions de $\frac{d^2x'}{dt^2}$, $\frac{d^2y'}{dt^2}$, $\frac{d^2z'}{dt^2}$. Mais on peut y parvenir facilement par la décomposition géométrique de la *déviation relative*.

D'après la définition que nous avons donnée de la déviation, on obtiendra la déviation relative du mobile en une quelconque de ses positions M, en cherchant sa position

relative pendant un temps infiniment petit θ, et la joignant à la position qu'aurait sur la tangente à la trajectoire relative, un point partant de M en même temps que le mobile, avec une vitesse constante égale à la vitesse relative du mobile en M. Elle sera la déviation dans le mouvement absolu, identique au mouvement relatif; et en la divisant par $\frac{\theta^2}{2}$, on aura l'expression de la force accélératrice dans ce mouvement absolu, ou de la force accélératrice relative. Nous allons montrer comment cette déviation relative peut être decomposée en d'autres plus simples, d'où resoltera la décomposition de la force elle-même.

Soient M (*fig.* 24) une position quelconque du mobile, MU sa trajectoire absolue, MU′ sa trajectoire relative,

Fig. 24.



c'est-à-dire la courbe qui, liée au système mobile, renferme toujours la position absolue du point; MU_1 la trajectoire absolue du point du système qui coïncidait avec le mobile en M. Si l'on prend sur les tangentes aux courbes MU′, MU_1 des quantités MT′, MT_1 égales aux espaces que parcourraient dans un temps infiniment petit θ, des mobiles partant de M, l'un avec la vitesse relative, l'autre avec la vitesse du point M du système, ces quantités pourront représenter ces vitesses, et la diagonale MT du parallélogramme $T'MT_1T$ représentera en direction et en grandeur

la vitesse du point sur sa trajectoire MU; de sorte qu'un point partant de M avec cette vitesse se trouverait en T après le temps θ.

Cela posé, soient m, m', m_1, après ce même temps θ, les positions des points qui décrivent les trois courbes en partant de M; la courbe MU' sera transportée avec le système, auquel elle est liée, et par conséquent la position m' du point mobile se confondra avec sa position absolue m, et le point M du système sera en m_1; de sorte que, pour avoir la position du système après le temps θ, il faudra lui donner un mouvement de translation qui amène M en m_1, et ensuite un mouvement de rotation autour d'un axe passant en m_1 et dont la direction différera infiniment peu de l'axe instantané correspondant au point infiniment voisin M.

Maintenant il est facile de voir que les lignes Tm, $T'm'$, T_1m_1 sont les déviations, dans le mouvement absolu du mobile, dans son mouvement relatif, et dans le mouvement du point du système. Elles donneraient des forces mêmes en les divisant par la même quantité $\frac{\theta^2}{2}$; elles peuvent donc être prises pour représenter proportionnellement ces trois forces.

Pour reconnaître la dépendance qui existe entre ces lignes, il faut effectuer le mouvement du système et reconnaître sa position après le temps θ.

Nous décomposerons le mouvement de translation parallèle qui amène M en m_1, en deux mouvements, dont le premier amènerait M en T_1, puis de T_1 en m_1. Tous les points du système auront des mouvements identiques. La première translation amènera T' en T, la seconde l'amènera en m'', en menant Tm'' parallèle et égale à T_1m_1. Il ne reste plus qu'à effectuer la rotation autour d'un axe m_1I passant par m_1, et le système sera parvenu à la position

qu'il occupe réellement après le temps θ, et dans laquelle le point m' est le point m lui-même, de sorte qu'il n'est nécessaire de s'occuper que du mouvement de m''. Soit μ la position où la rotation l'amène; en joignant ce point à m, la ligne μm représentera en direction et en grandeur la déviation relative $T'm'$.

Le quadrilatère $Tm\mu m''$ donne la solution de la question. En effet, Tm est la déviation dans le mouvement absolu du point, μm la déviation dans le mouvement relatif, Tm'' celle du mouvement du point du système. Il ne reste donc qu'à reconnaître la grandeur et la direction du quatrième côté $m''\mu$, et l'on connaîtra les trois forces dont on pourra considérer la force relative comme la résultante. Ce côté $m''\mu$ est un arc de cercle décrit par m'' tournant autour de m_1I, que l'on peut considérer comme parallèle à l'axe instantané au point M; et la vitesse angulaire avec laquelle s'opère ce mouvement peut être regardée comme la même que la *vitesse angulaire* ω *autour de l'axe instantané en* M; car il ne peut résulter de là que des erreurs infiniment petites par rapport à la quantité à calculer. L'angle décrit par le système autour de l'axe en m_1 peut donc être considéré comme égal à $\omega\theta$. Pour avoir le rayon de l'arc $m''\mu$, il faut abaisser de m'' une perpendiculaire sur m_1I, qui est égale à $m_1m''\sin\delta$, δ étant l'angle de m_1m'' avec m_1I, ou de la tangente à la trajectoire relative avec l'axe instantané. Or, si l'on désigne par v_r la vitesse relative, on aura

$$m_1m'' = v_r\theta;$$

donc $\mu m''$ sera égal au produit de $v_r\theta\sin\delta$ par $\omega\theta$, et, par conséquent,

$$\mu m'' = v_r\omega\theta^2\sin\delta.$$

Quant à la direction du côté $m''\mu$, elle est évidemment

perpendiculaire au plan $\mathrm{I}m_{i}m''$, ou à un plan passant par l'axe instantané et la direction de la vitesse relative, et le sens du mouvement qui l'a décrit est celui de la rotation autour de l'axe instantané.

Si maintenant on regarde les quatre côtés du quadrilatère comme représentant des forces, μm sera la résultante des trois forces $\mu m''$, $m''\mathrm{T}$, $\mathrm{T}m$ ou $\mathrm{T}m$, $m_{i}\mathrm{T}_{ii}$ $\mu m''$, et, en les divisant par $\frac{\theta^{2}}{2}$, on aura la proposition suivante :

« La forcee accélératrice relative est la résultante de » trois forces accélératrices.

» La première est la force appliquée au point mobile.

» La seconde est, en sens contraire, celle qui donne» rait à un point libre le mouvement du point du sys» tème qui coïncide avec le mobile à l'instant que l'on » considère.

» La troisième est $2v_{i}\omega \sin\delta$; sa direction est perpen» diculaire au plan mené par l'axe instantané et la direc» tion de la vitesse relative, et dans le sens opposé au mou» vement de rotation du système. »

215. On passera de ce cas général au cas plus simple par lequel nous avons commencé, en supposant nul le mouvement de rotation; la troisième composante disparaît alors et il reste les deux premières. On retombe ainsi sur le résultat obtenu précédemment.

Si le mouvement du système consistait dans une simple translation uniforme et rectiligne, il ne resterait que la force donnée, et la proposition précédente se réduirait à dire que le mouvement absolu, identique au mouvement relatif, ne dépend que de l'état initial relatif et de la force donnée, et nullement du mouvement des axes, ce qui n'est autre chose qu'un principe que nous avons admis comme résultat d'expériences.

216. Enfin considérons le cas où le système a un mouvement de rotation uniforme. Dans ce cas, la seconde composante de la force relative est précisément la force centrifuge en ce point; la troisième composante est toujours $2m\omega\nu,\sin\delta$. Voyons ce que deviennent ces expressions; et prenons, pour fixer les idées, le cas où le système rigide est la terre. Nous considérerons ici la terre comme ayant un mouvement uniforme de rotation autour de son axe immobile, et n'étant soumis à aucune action etrangère, la rotation entière s'effectue dans un jour sidéral, c'est-à-dire dans un temps exprimé par le nombre 86164, en prenant la seconde pour unité; d'où resulte

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0,000073,$$

ce qui est une très-petite quantité. L'angle δ est celui que fait la vitesse relative avec l'axe de la terre, ou le complément de celui qu'elle fait avec l'équateur; de sorte que $\nu,\sin\delta$ est la projection de la vitesse relative sur l'équateur.

En supposant la vitesse relative peu considerable, la troisième composante est très-petite par rapport aux deux autres; et, si on la néglige dans une premiere approximation, on arrive à la proposition suivante :

Le mouvement apparent d'un point à la surface de la terre peut être calculé en supposant la terre immobile, et joignant la force centrifuge à celles qui agissent effectivement sur ce point.

Si l'attraction de la terre est la seule force agissant sur le point, on retombe sur le résultat déjà obtenu dans le calcul de la force qui sollicite les corps à l'état de repos, en tenant compte du mouvement de rotation de la terre.

La composante que nous avons négligée produit des perturbations dont nous ne parlerons pas ici. C'est elle qui

produit le phénomène, observé depuis longtemps, de la déviation des corps vers l'est, quand on les abandonne sans vitesse à l'action de la pesanteur. C'est encore elle qui produit le mouvement du plan d'oscillation du pendule, mouvement que Poisson avait pensé devoir être insensible, à cause de la petitesse de cette force, mais dont les belles expériences de M. Foucault nous ont fait connaître la réalité.

217 *Remarque générale.* — Le mouvement relatif coïncidant avec un mouvement absolu dans lequel l'état initial serait le même que l'état relatif initial, et dans lequel la force serait la résultante de la force donnée et des deux forces fictives, c'est-à-dire la force relative, il s'ensuit que toutes les propositions démontrées dans le mouvement absolu d'un point libre, subsisteront dans le mouvement relatif, en y considérant le point comme soumis à l'action de la force relative. Nous allons en donner quelques exemples.

218. *Principe des aires dans le mouvement relatif.* — La remarque que nous venons de faire nous donne immédiatement les conséquences suivantes :

Lorsque la force relative d'un mobile passe constamment par un même point du système en mouvement, la trajectoire relative du mobile est plane, et le rayon vecteur, mené du point constant au mobile, décrit des aires relatives proportionnelles aux temps correspondants.

Et réciproquement

Si le rayon vecteur mené d'un point constant du système au mobile, décrit des aires, dont les projections sur trois plans rectangulaires liés au système croissent proportionnellement aux temps; ou, en d'autres termes, si la trajectoire relative d'un mobile est plane, et que les aires décrites par son rayon vecteur partant d'un point con-

stant de ce plan, croissent proportionnellement au temps, la force relative qui agit sur le mobile passe à chaque instant par ce point constant.

219. *Équation des forces vives dans le mouvement relatif d'un point libre.* — En considérant le mouvement absolu qui est identique au mouvement relatif du mobile, la moitié de l'accroissement de la force vive dans ce mouvement, pendant un temps infiniment petit, sera égal au travail des forces pendant ce même temps. Donc, en introduisant les dénominations du mouvement relatif, le travail élémentaire de la force relative est égal à la moitié de la force vive relative, correspondante au même temps. Or le travail d'une force est égal à la somme de ceux de ses composantes, et le travail relatif de la troisième composante de la force relative est nul, puisque cette force est perpendiculaire à la vitesse relative, et, par conséquent, à la trajectoire relative. On peut donc énoncer cette proposition :

Dans le mouvement relatif d'un point libre, la moitié de l'accroissement de la force vive, dans un intervalle infiniment petit, est égale au travail correspondant de la force réelle, plus au travail de la force d'inertie que produiroit le point, s'il était lié au système à l'instant que l'on considère.

220. *Du mouvement relatif d'un point qui n'est pas libre.* — Considérons maintenant le cas où le mobile dont on cherche le mouvement relatif ne serait pas entièrement libre. Il peut être lié par une ou par deux équations, et ces équations peuvent renfermer d'une manière quelconque le temps, ainsi que les coordonnées absolues et relatives du point. Comme les équations de transformation des coordonnées permettent d'exprimer les unes au moyen des autres, on peut supposer que ces équations ne renferment

que le temps et les coordonnées relatives, par exemple. Le point se trouve ainsi assujetti, par chaque équation, à rester sur une surface variable avec le temps, et donnée à chaque instant de forme et de position par rapport au système des axes mobiles.

Cette surface produit à chaque instant une force normale, et, si on la joignait aux forces qui agissent sur le point, on pourrait supprimer la surface; et, s'il n'existait que cette seule liaison, le point pourrait alors être considéré comme entièrement libre, et l'on rentrerait dans le premier cas. D'où résulte cette proposition :

Lorsque le mobile est assujetti à rester sur une surface donnée, variable de forme et de position, la force relative se déterminera comme dans le cas d'un point libre, pourvu que l'on joigne à la force donnée une force indéterminée, normale à la surface, au point où se trouve le mobile, et à l'instant que l'on considère.

Si, au lieu d'une seule surface, on en avait deux, on agirait de même pour la seconde, et l'on aurait une seconde force indéterminée, normale à la seconde surface. Ces deux forces se composeraient en une seule, indéterminée en grandeur, et assujettie à se trouver dans le plan normal à la courbe d'intersection des deux surfaces.

On voit que, dans le cas où le point est lié par une seule équation, il s'introduit par cela même une nouvelle quantité inconnue, mais il s'ajoute en même temps une équation connue entre les coordonnées et le temps. Si le point est lié par deux équations, il s'introduit en même temps deux inconnues; de sorte que le nombre des inconnues est toujours égal au nombre des équations.

D'après la remarque générale que nous avons faite sur l'extension au mouvement relatif, des propositions démontrées dans le mouvement absolu, il est presque inutile de

20.

dire que l'équation des forces vives relatives aura lieu lorsque le point sera assujetti à rester sur une surface ou une courbe de forme constante, et liée invariablement au système des axes mobiles. Et, en effet, la force qu'elle produit étant normale à la trajectoire relative du mobile, donne un travail élémentaire égal à zéro.

Nous avons terminé l'exposition des principes généraux qui se rapportent au mouvement d'un point. Nous en ferons quelques applications importantes dans le Livre suivant.

CHAPITRE XIV.

COMMENT L'ASTRONOMIE EST DEVENUE UNE SCIENCE DE RAISONNEMENT.

221. L'Astronomie a été longtemps une *science d'observation*, *Newton* en a fait une *science de raisonnement*.

Nous allons montrer comment cette grande transformation a été opérée, et d'abord, nous indiquerons rapidement par quelle suite d'observations et de raisonnements l'Astronomie était parvenue au point où elle était lorsque ce grand homme a paru. Ce sera un exemple intéressant des méthodes par lesquelles on peut déduire de faits particuliers, des faits généraux pouvant servir de base à une science de raisonnement.

Un observateur attentif, aidé d'instruments bien simples, reconnaît facilement que tous les astres, y compris le soleil et la lune, se déplacent d'une manière continue, et semblent tourner uniformément, en conservant les mêmes positions relatives, autour d'un axe mené du point de la terre où il se trouve, à un point du ciel qu'on nomme *pôle*, et est très-voisin d'une certaine étoile, nommée, à cause de cela, *étoile polaire*. Or, en quelque point de la terre que soit placé l'observateur, il reconnaît que l'axe de cette révolution est toujours dirigé de la même manière par rapport aux étoiles, qui semblent former un système rigide; d'où il est facile de conclure que la distance de la terre aux étoiles est incomparablement plus grande que celles des différents lieux d'observation sur la terre. La durée de cette révolution se nomme *jour sidéral*.

Mais on s'aperçoit bientôt que les positions relatives de tous les astres ne restent pas constantes, il suffit d'observer la lune quelques jours de suite, pour reconnaître des changements notables dans ses distances aux étoiles. Il en est de même du soleil, dont le déplacement est environ douze fois plus lent.

Outre ces deux astres qui se présentent les premiers, il en est quelques autres que leur petitesse a fait d'abord confondre avec les étoiles, et dont le déplacement est bien loin d'offrir à l'observateur une aussi grande régularité. On leur a donné le nom de *planètes*.

222. *Détermination des points sur la sphère céleste.* — Tous les mouvements se déterminent facilement en rapportant les positions a deux grands cercles de la sphère céleste idéale, dont l'observateur occupe le centre, et sur la surface de laquelle il projette tous les astres par des rayons visuels. L'un de ces cercles est perpendiculaire à l'axe du monde, autour duquel s'effectue la revolution *diurne* commune à tous les astres, et se nomme l'*équateur céleste*; le second a son plan perpendiculaire au premier et passe par une étoile choisie arbitrairement. Cela posé, un point quelconque sera déterminé sur la sphère en menant un plan par ce point et l'axe du monde, ce qu'on appelle *un plan méridien*, puis cherchant l'angle de ce plan avec le premier méridien, et la distance du point à l'équateur, comptée sur le méridien du point. Le dernier de ces angles se nomme *la déclinaison du point*, et l'autre son *ascension droite*. Ce sont là les deux coordonnées que l'on emploie pour une première détermination des points, et qui ont servi pour tracer les courbes qui représentent la marche apparente du soleil, de la lune et des planetes pour un observateur placé a la surface de la terre.

On a reconnu ainsi que le centre du soleil decrit sur la

sphère céleste un grand cercle qui semble invariable, et dans un intervalle de temps constant, qu'on nomme *une année*. Ce cercle se nomme *écliptique*.

223. *Autre système de coordonnées.* — Le centre de la lune semble aussi d'abord décrire un grand cercle, mais ce cercle n'est pas invariable comme l'écliptique, et l'étude approfondie de son déplacement, et surtout des mouvements des planètes, a fait sentir l'utilité qu'il y aurait à rapporter les points à deux autres grands cercles coordonnés. L'un est l'écliptique, l'autre lui est perpendiculaire, et passe par les points où l'écliptique rencontre l'équateur, et qu'on nomme *points équinoxiaux*, parce que quand le soleil passe par l'un ou l'autre, le jour a la même durée que la nuit, pour tous les points de la terre. Ces points se déterminent facilement en cherchant chaque jour la déclinaison du soleil. Elle est nulle aux équinoxes; et cette position ainsi que l'époque où elle a lieu se trouvent par de simples proportions d'après les ascensions droites, et les déclinaisons observées, les jours qui précèdent et ceux qui suivent le passage du centre du soleil par le plan de l'équateur.

Dans ce nouveau système de coordonnées angulaires, on détermine un point quelconque en y faisant passer un plan renfermant les pôles de l'écliptique; ce plan coupe l'écliptique en un point dont la distance à l'équinoxe choisi pour origine se nomme la *longitude du point*, sa *latitude* est sa distance à l'écliptique, comptée sur le grand cercle perpendiculaire.

La transformation de coordonnées pour passer d'un système à l'autre, se fait par des formules très-simples; et c'est toujours l'ascension droite et la déclinaison que l'on cherche par l'observation; il serait beaucoup moins commode de chercher directement la longitude et la latitude. Mais pour donner la précision nécessaire à toutes ces déterminations,

il faut définir exactement le point par lequel on fait passer l'équateur et les méridiens; et pour cela, il faut connaître la figure et les dimensions de la terre.

224. *Figure de la terre.* — Nous allons indiquer rapidement comment on a pu y parvenir. Quelques observations sur la disparition progressive de la mâture de vaisseaux s'éloignant du rivage, sur la figure circulaire de l'horizon, vu de points élevés, sur terre comme sur mer, celle de l'ombre portée par la terre dans les éclipses de lune, indiquaient bien pour la terre une forme arrondie, mais ces premières vues ne pouvaient faire connaître ni sa figure exacte, ni surtout ses dimensions.

Pour y parvenir, on a cherché comment variait la direction de la verticale à mesure qu'elle se déplaçait en restant parallèle à un même méridien céleste; et l'on a reconnu qu'elle reste sensiblement dans un même plan, et que les arcs de la courbe suivant laquelle ce plan coupe la surface de la terre sont proportionnels aux angles des verticales correspondantes, et par conséquent aussi des tangentes à cette courbe. Or, cette propriété n'appartient qu'au cercle. Cette courbe, que l'on nomme un *méridien terrestre*, peut donc, au moins dans une première approximation, être considérée comme un cercle, intersection du plan d'un méridien céleste et de la surface de la terre. Le rayon de ce cercle s'obtiendra en divisant un quelconque de ses arcs par l'angle des tangentes extrêmes, qui est celui des verticales correspondantes.

Les mêmes observations répétées pour un grand nombre de points de la surface de la terre donnent des résultats semblables; et l'on en a conclu que tous les méridiens célestes coupent la surface de la terre suivant des cercles égaux. Les plans de ces cercles, étant ceux des méridiens célestes, passent tous par l'axe du monde; et, par conséquent,

la terre est une sphère engendrée par un cercle dont le plan passe constamment par l'axe du monde, et dont le rayon est déterminé comme nous venons de l'indiquer pour un de ses grands cercles. Le mètre est la quarante-millionième partie de sa circonférence.

Or, comme nous avons vu que l'axe du monde pouvait être mené par un point quelconque de la terre, nous choisirons à cet effet son centre même, et ce sera plus avantageux dans la plupart des cas. Nous appellerons *pôles terrestres* les points de rencontre de cet axe et de la surface de la terre, *méridiens terrestres* les grands cercles passant par ces pôles, *équateur terrestre* celui qui est mené perpendiculairement à l'axe par le centre de la terre. Et les points sur la surface de la terre se détermineront au moyen de cet équateur et d'un méridien fixé arbitrairement, de même que ceux de la sphère céleste le sont au moyen de l'équateur et d'un méridien celeste. Ces deux coordonnées ont reçu le nom de *longitude* et de *latitude terrestres*. Les Français prennent pour premier méridien celui qui passe par l'Observatoire de Paris.

225. *Parallaxes.* — Maintenant que nous faisons passer les plans coordonnés par le centre de la terre, c'est de ce point qu'il faut faire partir les rayons visuels qui déterminent les positions des astres. Les ascensions droites ne seront pas changées, mais les déclinaisons dépendant de l'angle du rayon visuel avec la verticale, au moment du passage de l'astre au méridien, ne seront pas les mêmes si ce rayon visuel est mené du centre ou de la surface. La différence de ces deux angles, autrement dit des distances zénithales, sera l'angle suivant lequel le rayon de la terre passant par le lieu de l'observation, est vu de l'astre en question. Cet angle se nomme la *parallaxe* de cet astre; il dépend de l'inclinaison de ce rayon de la terre sur le rayon visuel.

Si l'astre est dans le plan horizontal du lieu, cette inclinaison est d'un angle droit, et la parallaxe est dite *horizontale*; sous toute autre inclinaison, elle s'appelle *parallaxe de hauteur*. Cette dernière a un rapport très-simple avec l'autre, parce qu'elle est toujours assez petite pour pouvoir être regardée comme proportionnelle à son sinus. Elle est alors égale à la parallaxe horizontale multipliée par le sinus de la distance zénithale de l'astre.

Il suit de là que lorsqu'on connaît la parallaxe horizontale d'un astre, et nous indiquerons tout à l'heure un moyen de la trouver, les distances zénithales qui seraient observées du centre de la terre se trouvent ramenées à la détermination de celles qui le seront d'un point de la surface, et qui sont en effet les seules observables.

La parallaxe horizontale d'un astre, ayant pour sinus le rapport du rayon de la terre à la distance de son centre à l'astre, fait connaître immédiatement ce rapport.

226. *Orbite de la lune.* — Les longitudes et latitudes astronomiques seront rapportées à l'écliptique, lieu des positions du centre du soleil, vu du centre de la terre, et d'un grand cercle passant par ses pôles et l'un des deux points équinoxiaux. Pour donner un premier exemple de l'utilité de ce nouveau système de coordonnées, nous allons y rapporter les positions successives de la lune. Nous chercherons d'abord ses *nœuds*, ou les points où son centre passe par le plan de l'écliptique, et a par conséquent pour latitude zéro. On en déterminera la position, ainsi que l'époque du passage, par le procédé déjà indiqué pour les équinoxes; et l'on trouve que la droite qui les joint passe par le centre de la terre, que le plan mené par cette droite et l'une quelconque des positions du centre de la lune, fait un angle constant d'environ 5°9' avec le plan de l'écliptique; mais que la ligne des nœuds se déplace, et tourne autour du centre

de la terre dans un sens opposé à celui du mouvement du soleil, et qu'elle accomplit cette révolution dans un intervalle d'environ 18 ans $\frac{2}{3}$. D'où il suit que la lune se meut dans une orbite dont le plan fait un angle constant avec celui de l'écliptique, et avec celui de l'équateur un angle variable dont les limites sont l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur, augmentée ou diminuée de 5° 9'.

227. *Forme et dimensions de l'orbite.* — Le centre de la lune semble d'abord, comme nous l'avons dit, décrire un grand cercle sur la sphère céleste; mais l'observation suivie de son diamètre apparent, montre que sa distance au centre de la terre varie d'une manière continue.

Si l'on trace sur un plan des rayons vecteurs faisant entre eux les mêmes angles que ceux qui correspondent aux observations, et qu'on porte sur eux à partir de leur point de concours des longueurs en raison inverse des diamètres apparents, on construira une courbe qu'on pourra regarder comme semblable à l'orbite de la lune. On obtient ainsi une ellipse dont le centre de la terre occupe un foyer.

228. *Parallaxe de la lune.* — Pour obtenir la parallaxe horizontale d'un astre, on prend sur un même méridien deux points très-éloignés l'un de l'autre et dont on connaît les latitudes; on observe de ces deux points les distances zénithales de l'astre, au moment de son passage à ce méridien. Les deux rayons visuels qui les déterminent et les rayons terrestres menés aux deux points forment un quadrilatère, dont on connaît trois angles et par suite le quatrième. Ce dernier est formé par les lignes menées de l'astre aux deux points du méridien, à l'instant du passage; il est la somme des deux parallaxes de hauteur de l'astre à ce moment, en supposant qu'on ait choisi les deux points de

part et d'autre de la ligne qui joint l'astre au centre de la terre. Or ces parallaxes sont les produits de la parallaxe horizontale par les sinus des distances zénithales ; et comme leur somme est connue, cette parallaxe le sera aussi.

Si l'on appliquait ce procédé à des astres trop éloignés, on trouverait des valeurs insensibles pour la parallaxe ; les étoiles la donneraient nulle ; le soleil en donne une sensible, mais les erreurs inévitables d'observation donneraient de l'incertitude au résultat ; pour la lune, au contraire, dont la distance à la terre est beaucoup moins considérable, on peut avoir confiance dans la valeur trouvée par ce moyen.

Distance de la lune à la terre. — La parallaxe horizontale d'un astre ayant pour sinus le rapport du rayon de la terre à la distance de l'astre au centre de la terre, on conclut, de la parallaxe de la lune, que la valeur moyenne de sa distance à la terre est d'environ soixante rayons terrestres.

DU MOUVEMENT DES PLANÈTES.

229. Les planètes observées de la terre offrent une marche très-irrégulière. Elles semblent se déplacer tantôt dans le même sens que le soleil, tantôt en sens contraire, après avoir paru quelque temps stationnaires. Ces mouvements ont été représentés par les anciens astronomes au moyen de combinaisons compliquées de mouvements circulaires ; mais enfin on a eu l'idée de chercher quelles apparences elles offriraient, ainsi que la terre elle-même, à un observateur supposé au centre du soleil, et c'est la simplicité de ces mouvements relatifs qui a fait adopter le système de Copernic et abandonner celui de Ptolémée. Les lois de ces mouvements sont d'une trop grande importance pour que nous ne donnions pas, au moins, une idée sommaire des méthodes qui les ont fait découvrir.

230. *Ligne des nœuds.* — Les planètes étant rapportées au plan de l'écliptique, les points qu'il est naturel de déterminer d'abord sont ceux où elles percent ce plan, et qu'on nomme *nœuds*. On trouve ces points, et l'époque où le centre de la planète y passe, par la méthode que nous avons exposée à ce sujet pour la lune; et l'on reconnaît que la ligne qui joint les deux nœuds passe par le centre du soleil, et fait un angle sensiblement constant avec la ligne des équinoxes. Nous nous bornons à indiquer ces résultats, sans entrer dans des détails qui nous écarteraient de notre objet.

231. *L'orbite d'une planète est plane et son inclinaison sur le plan de l'écliptique est constante.* — La terre se trouve deux fois par an dans la ligne des nœuds de la planète; l'instant où cela arrive est facile à déterminer, puisque c'est celui où la longitude du soleil est précisément égale à l'inclinaison de la ligne des nœuds sur celle des équinoxes. A ce moment, il sera facile de connaître la longitude et la latitude de la planète, et, par suite, de calculer l'angle que forme avec le plan de l'écliptique la ligne abaissée perpendiculairement du centre de la planète sur la ligne des nœuds. En répétant ces observations et ces calculs, toutes les fois que la terre se trouve dans la ligne des nœuds, ce qui correspond à des positions différentes de la planète dans son orbite, on trouve la même valeur pour cet angle; d'où il suit que la planète est toujours dans un même plan, passant par la ligne des nœuds, et ayant sur le plan de l'écliptique l'inclinaison constante qui a été calculée comme nous l'avons dit.

Ce plan est fixe si le soleil l'est, comme on l'admet dans le système de Copernic; et, si le soleil est en mouvement, ce plan est entraîné parallèlement à lui-même, et la ligne des nœuds passe toujours par le centre du soleil.

232. *Mouvement de la planète dans son orbite.* — Le lieu des positions de la planète dans le plan fixe ou mobile de son orbite, forme sa trajectoire relative au soleil. On la déterminera en cherchant à une époque quelconque ses deux coordonnées polaires, qui seront sa distance au centre du soleil, et l'angle formé par ce rayon vecteur avec la ligne des nœuds.

A cet effet on calculera chaque jour la latitude et la longitude du soleil et de la planète; et, en supposant connue la distance du soleil à la terre, on déterminera facilement la position de la planète, qui sera le point de rencontre du rayon vecteur mené du centre de la terre à la planète, avec le plan de l'orbite; d'où résulteront les deux coordonnées cherchées.

La question est donc ramenée à la détermination du mouvement du soleil par rapport à la terre, et on peut l'obtenir au moyen de la parallaxe du soleil et de l'observation suivie de son diamètre apparent. Cette parallaxe ne saurait être obtenue avec beaucoup d'exactitude par le procédé suivi pour la lune; mais on y parvient par des moyens plus sûrs, que l'on trouvera développés dans les Traités spéciaux d'Astronomie. La trajectoire ainsi déterminée est une ellipse dont la terre occupe un des foyers, et, par suite, la trajectoire de la terre par rapport au soleil serait une ellipse identique, dont le soleil occuperait un foyer.

La distance du soleil à la terre étant déterminée pour chaque jour, on connaîtra, comme nous l'avons dit, les coordonnées d'une planète quelconque dans son mouvement relatif au soleil, et l'on a reconnu ainsi que son orbite était une ellipse dont le soleil occupait un foyer.

233. Le mouvement de chaque planète ainsi déterminé par rapport au soleil, Kepler a reconnu que l'aire décrite par

le rayon vecteur partant du centre du soleil est pour chacune d'elles proportionnelle au temps employé à la décrire, et que d'une planète à l'autre les carrés des temps de leurs révolutions autour du soleil sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites. Ces résultats, vérifiés aussi souvent que cela a été possible, peuvent être considérés comme certains et indépendants de toute hypothèse. Ils constituent des faits généraux auxquels toutes les théories seraient tenues de satisfaire, mais qui suffisent, comme nous allons le voir, à l'établissement de la théorie unique, qui donne l'explication de tous les phénomènes relatifs aux mouvements des corps célestes. Ces faits généraux, auxquels on a donné le nom de *lois de Kepler*, peuvent être énoncés comme il suit :

Les planètes, considerées comme de simples points matériels, se meuvent par rapport au soleil, suivant des ellipses dont un foyer est au centre du soleil.

Les aires décrites par le rayon vecteur partant du centre du soleil, sont proportionnelles au temps.

Les carrés des temps des révolutions de deux planètes quelconques autour du soleil, sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.

Ces lois s'observent dans les mouvements des satellites d'une même planète par rapport au centre de cette planète.

Nous arrêterons ici l'exposition des recherches qui avaient pour but de déterminer par l'observation assez de données pour faire de l'Astronomie une science de raisonnement. C'est à Newton qu'on doit ce grand résultat. Il y est parvenu en perfectionnant d'abord la science générale des forces, et en supposant ensuite que la matiere qui compose les corps célestes, est soumise aux mêmes lois de mouvement que la matière des corps terrestres. C'est ce que nous allons exposer brièvement.

CHAPITRE XV.

CONSÉQUENCES DES DONNÉES PRÉCÉDENTES.

234. Avant Newton, on avait émis l'opinion que la terre et les autres planètes se meuvent autour du soleil immobile, en vertu d'une attraction dirigée vers son centre. Les uns déclaraient ignorer la loi suivant laquelle elle avait lieu; les autres, par des analogies sans preuves, la supposaient en raison inverse du carré de la distance. Mais aucune raison sérieuse ne venait à l'appui de ces hypothèses; et non-seulement on ne pouvait démontrer la loi de cette attraction, mais l'existence même d'une force dirigée vers le centre du soleil n'était qu'une simple conjecture.

Newton se trouva ainsi naturellement porté à étudier les effets d'une force dont la direction passerait constamment vers un centre fixe, et il découvrit cet important théorème auquel on a donné le nom de *principe des aires*, et qui consiste en ce que :

Lorsqu'un point matériel est sollicité par une force dont la direction passe par un centre fixe, et peut d'ailleurs varier suivant une loi quelconque avec le temps et la position, le rayon vecteur mené du centre au point mobile, décrit des aires planes proportionnelles au temps,

Et réciproquement,

Si un point se meut dans un plan et que son rayon vecteur partant d'un pôle fixe, décrive des aires proportionnelles au temps, la force résultante qui produit ce mouvement passe constamment par ce pôle fixe.

Newton, en possession de ce remarquable théorème que

personne n'avait énoncé avant lui, l'appliqua immédiatement aux planètes, en les considérant comme de simples points matériels, et admettant que la matière qui les compose est soumise aux lois générales du mouvement, reconnues pour les corps terrestres. Or, d'après une des lois de Kepler, les planètes jouissent de cette propriété des aires décrites autour du centre du soleil; il a donc pu en conclure, non par conjecture, mais comme conséquence nécessaire des faits observés, cette proposition que :

Le mouvement de chaque planète autour du soleil suppose fixe, est produit par une force dont la direction passe constamment par le centre de ce corps.

235. Mais le génie de Newton devait le conduire sur ce point à une proposition plus générale et tout à fait indispensable. Qui pouvait en effet assurer que le soleil était immobile; et, s'il ne l'était pas, que pouvait-on conclure de la proportionnalité des aires relatives, au temps?

C'est pour répondre à cette question qu'il étudia les lois du mouvement relatif, que personne n'avait fait connaître avant lui, et que nous avons exposées précédemment avec plus de développement qu'il n'en avait donné.

Et le théorème précédent, démontré dans le cas du soleil fixe, fut remplacé par le suivant, qui est indépendant de tout mouvement supposé à ce corps :

Le mouvement relatif des planètes autour du soleil est produit par une force relative passant par son centre : ce qui signifie que si, à un instant quelconque, on appliquait à la planète une force accélératrice égale et de sens contraire à celle qui donnerait au soleil le mouvement qu'il a dans l'espace, la résultante de cette force et de celle qui est réellement appliquée à la planète serait constamment dirigée vers le centre du soleil.

236. La direction de la force relative capable de pro-

duire les mouvements relatifs observés étant connue, il restait à déterminer comment varie son intensité avec la position relative de la planète.

C'est à quoi Newton est parvenu en s'appuyant sur le principe des aires. Il a découvert une formule qui exprime l'intensité de la force centrale, en fonction de quantités infiniment petites, dépendantes de la nature de la trajectoire, et susceptibles d'être transformées de plusieurs manières en quantités finies. Au moyen de cette importante formule, on connaît en chaque point de la trajectoire la valeur de la force si cette courbe est donnée; et si c'est la force qui est donnée, et la trajectoire inconnue, on a une équation entre certains éléments de la courbe; et la détermination complète du mouvement se réduit à une pure question de calcul intégral.

Newton a fait plusieurs applications de sa formule, particulièrement au cas où la trajectoire décrite est une ellipse, et où l'un des foyers est le pôle autour duquel le rayon vecteur décrit des aires proportionnelles au temps. Il a trouvé que dans ce cas la force qui fait décrire un point libre cette trajectoire, varie en raison inverse du carré de la distance au foyer. Et, comme la courbe est partout concave vers le foyer, la force est dirigée vers ce point, comme s'il était un centre d'attraction.

La parabole et l'hyperbole donnent des conséquences analogues.

237. Newton s'est ensuite occupé de la question inverse, et s'est demandé quelle courbe décrirait un mobile partant d'une position connue, avec une vitesse connue en grandeur et en direction, et sollicité par une force dirigée vers un point fixe et variant d'intensité en raison inverse du carré de la distance. Il démontra que la trajectoire peut être l'une quelconque des trois coniques; sa nature dépend

d'une condition très-simple entre la distance initiale du mobile au foyer, et la grandeur de sa vitesse au même instant.

238. L'expression que Newton trouve pour la force rapportée à l'unité de masse, est le rapport d'une quantité constante pour la même planète au carré du rayon vecteur. Cette constante est égale à un facteur, identique pour toutes les planètes, multiplié par le rapport du cube du grand axe au carré du temps de la révolution. Or, d'après la troisième loi de Kepler, ce rapport ne change pas d'une planète à l'autre; d'où il suit que la force qui agit sur l'unité de masse d'une planète quelconque, est la même à distance égale du soleil.

Et, réciproquement, si cela est, la troisième loi de Kepler en est une conséquence.

Nous pouvons résumer ainsi ce qui précède, en entendant que les forces et les mouvements sont relatifs au soleil :

« La proportionnalité des aires au temps prouve que la » direction de la force qui sollicite les planètes passe par » le centre du soleil.

» Les trajectoires étant des ellipses dont le soleil occupe » un foyer, il en résulte que cette force est en raison » inverse du carré de la distance.

» Enfin de ce que, pour les diverses planètes, les carrés » des temps des révolutions sont comme les cubes des » grands axes, il s'ensuit que, à distance égale du soleil, » l'unité de masse est sollicitée par une force de même » intensité. »

Et comme les mouvements des satellites sont soumis aux mêmes lois par rapport à leurs planètes que les mouvements des différentes planètes par rapport au soleil, les propositions que nous venons d'énoncer s'y appliquent, et l'on peut dire que les satellites d'une même planète sont

sollicités par une force relative dirigée vers le centre de cette planète, proportionnelle à leurs masses respectives et en raison inverse du carré de la distance au centre de cette planète.

ATTRACTION UNIVERSELLE.

239. Les planètes, dans l'infinité de positions qu'elles prennent autour du soleil, étant sollicitées par des forces dirigées constamment vers le centre de cet astre, il serait bien difficile de se refuser à admettre que la cause de cette tendance réside dans le soleil même, et consiste par conséquent dans une attraction exercée par la matière du soleil sur celle des planètes, proportionnellement aux masses respectives de ces planètes, et en raison inverse du carré de la distance.

Admettant cette action du soleil sur la matière qui compose toutes les planètes, il est bien naturel de l'étendre aux satellites eux mêmes. Et comme les rayons menés du soleil aux différents points du système d'une planète et de ses satellites peuvent être considérés comme parallèles et égaux, les forces produites sur ces corps seront parallèles, et proportionnelles à leurs masses, d'où il suit que leurs mouvements relatifs ne seront pas altérés par l'action du soleil.

Si donc on néglige toute autre action extérieure à ce système partiel auquel s'étendent les lois de Kepler, on est dans le même cas que pour le soleil et les planètes, et l'on en conclut que les mouvements des satellites autour de leur planète sont dus à une attraction exercée par cette planète sur ces satellites, proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré des distances.

Maintenant, admettant avec Newton que la loi de l'égalité de l'action et de la réaction, vérifiée par toutes les expériences à la surface de la terre, a lieu pour tous les

corps de la nature, on conclura que les planètes attirent le soleil autant qu'elles en sont attirées, et par conséquent proportionnellement à leurs masses respectives et en raison inverse des carrés des distances. De même les satellites d'une planète l'attireront proportionnellement à leurs propres masses, et en raison inverse du carré de la distance.

Pour la terre qui n'a qu'un satellite, et pour les planètes qui n'en ont pas, rien ne prouve jusqu'ici qu'elles attirent les corps proportionnellement aux masses de ces corps. Nous en parlerons tout à l'heure.

240. *L'attraction s'exerce sur toutes les parties des corps.* — Si l'attraction du soleil sur chaque planète était supposée répartie également sur toute sa masse, il en résulterait des forces égales pour deux masses égales prises dans des planètes différentes, et placées à égales distances du soleil. C'est une conséquence évidente de la proportionnalité des attractions totales aux masses des planètes.

Or si toutes ces masses égales n'étaient pas réellement attirées chacune avec une égale intensité, il faudrait qu'il s'établît entre elles des compensations, d'où résulteraient des forces proportionnelles aux nombres de ces forces inégales; ce qui est, sinon impossible, au moins peu probable. Et de même si une planète n'attire pas également des parties d'égales masses de ses satellites, il faudra que toutes les masses égales qui composent chacun d'eux et seront sollicitées par des forces inégales donnent pour les sommes de ces forces des quantités proportionnelles à leurs nombres.

Mais l'impossibilité de pareilles compensations n'est pas la seule raison que l'on ait de les rejeter, et la planète que nous habitons va nous donner des preuves directes, que l'analogie permettra d'étendre aux autres planètes et au soleil lui-même

En effet Galilée a démontré, contre l'opinion des phy-

siciens de son temps, que tous les corps abandonnés sans vitesse à la libre action de la pesanteur prennent des mouvements identiques : d'où il résulte que cette force est proportionnelle à la masse, quelle que soit la nature de la matière. Les légères différences que les corps présentent à cet égard tiennent à la résistance de l'air, et disparaissent entièrement en faisant l'expérience dans le vide. Galilée est parvenu à cet important résultat, soit en laissant tomber des corps d'une grande hauteur, soit en faisant osciller les corps les plus divers de formes et de nature; il a toujours trouvé des résultats identiques. Newton a répété ces expériences sur les pendules. Il a fait osciller des corps, entiers ou brisés en un nombre quelconque de parties, il les a renfermés les uns dans les autres, et la durée des oscillations n'a pas été plus changée que l'indication donnée dans ces mêmes cas par la balance. On doit donc conclure de là que le poids des corps, c'est-à-dire l'attraction produite par la terre, est proportionnelle à la masse de ces corps, et indépendante de leur grandeur, de leur forme et de leur nature; et qu'elle s'exerce sur toutes les molécules, intérieures et extérieures.

Ce résultat, ayant lieu à quelque hauteur qu'on fasse l'expérience, doit être regardé comme s'appliquant à tous les points de la lune.

Maintenant qu'il est démontré, par des expériences directes, que l'une des planètes attire également toutes les parties de matière ayant des masses égales, on ne peut se refuser à admettre cette même propriété pour les planètes sur lesquelles on ne peut faire ces expériences, et dont quelques-unes indiquent assez visiblement cette propriété, par l'attraction exercée sur leurs satellites, proportionnellement à leurs masses.

Et la même analogie conduit à admettre que le soleil attire également toutes les parties d'égale masse des planètes,

sur lesquelles on sait d'ailleurs que son action est proportionnelle à leurs masses. Quant aux satellites de ces planètes, il est impossible de ne pas admettre que l'action du soleil s'exerce de la même manière que sur la planète dont ils sont voisins, c'est-à-dire que l'attraction est la même sur des masses égales prises dans le même satellite, ou dans des satellites différents, et situées à la même distance du soleil.

Réciproquement, d'après le principe de l'égalité de la réaction à l'action, le soleil attirant également deux masses égales quelconques, prises dans des planètes ou des satellites quelconques, on conclura que deux portions de matière ayant une même masse quelconque, placées à égale distance du soleil l'attirent également. Et, si elles sont placées à des distances inégales, l'attraction sera en raison inverse des carrés des distances.

Maintenant les parties d'égale masse d'une planète attirant également le soleil devront aussi attirer également une même masse quelconque de leurs satellites, et réciproquement. Enfin on ne pourrait supposer que le soleil seul fît exception à cette loi générale, et l'on admettra facilement que toutes les parties d'égale masse du soleil attirent également une même masse prise dans une planète ou un satellite, et donne lieu à une réaction égale.

241. Jusqu'ici nous n'avons parlé que des actions mutuelles entre des parties aussi petites que l'on voudra, prises dans le soleil et les planètes ou leurs satellites, ou bien prises dans une planète et un de ses satellites; et nous n'avons pas considéré l'action d'une planète à une autre, ou d'un satellite à une autre planète, ou à un autre satellite. Mais peut-on supposer qu'une portion de matière prise dans une planète ou un satellite, et qui attire tous les points du soleil, et d'autres encore si c'est un satellite, ou une planète ayant un satellite, peut-on supposer que cette portion de

matière sera sans action sur les autres planètes et leurs satellites? Une si extraordinaire analogie porte à admettre la même loi d'attraction entre deux masses appartenant à des planètes quelconques ou des satellites quelconques, qu'il est presque impossible de la repousser, bien que l'on conçoive parfaitement qu'il n'est pas absolument impossible qu'il en soit autrement.

Enfin Newton lui a donné une éclatante confirmation, en prouvant qu'elle explique et permet de calculer les mouvements des comètes, qui constituaient des phénomènes jusque-là inexplicables. C'est dans ce sens que nous nous croyons le droit de proclamer avec Newton cette loi générale du système du monde :

« Dans le système composé du soleil, des planètes, de » leurs satellites et des comètes, deux molécules quelcon- » ques s'attirent proportionnellement à leurs masses, et » en raison inverse du carré de leur distance. »

Les forces qui sollicitent tous les points qui composent le système solaire, étant ainsi connues, et ce système étant considéré comme existant seul, toutes les questions qu'on peut se proposer sur les mouvements de ses différentes parties, rentrent dans la science générale des forces, et, par conséquent, on peut dire, comme nous l'avions annoncé, que *Newton a fait de l'Astronomie une simple branche d'une science de raisonnement*.

242. Mais comme dans toute question les résultats ne sont déterminés que lorsque les données en sont complètes, il y en aura dans l'astronomie qui laisseront de l'indétermination dans les résultats du calcul, lorsqu'il y en aura dans les données. Par exemple, si l'on ne connaît pas la loi des densités des différentes couches concentriques qui composent une planète, on sera obligé de la représenter par une fonction inconnue qui pourra entrer dans les résultats, et y

laisser une incertitude qui permettra cependant quelquefois de tirer des conséquences importantes. Mais cette loi inconnue n'influera pas sur les résultats qui ne dépendent que de la masse totale et non de sa distribution.

Remarque. — Toutes les molécules du système solaire agissant les unes sur les autres, le mouvement relatif d'une planète autour du soleil ne sera pas dû à l'action seule de ce dernier, et tous les autres corps agiront sur elle, et troubleront le mouvement elliptique qui résulterait de l'attraction seule du soleil. On pourra négliger ces perturbations dans une première approximation; mais on ne pourra se dispenser d'en tenir compte dans une seconde, parce qu'elles deviennent sensibles dans beaucoup de phénomènes, et leurs irrégularités s'expliquent complétement par ces causes perturbatrices, de sorte que les dérangements que présentent les mouvements des planètes, de leurs satellites et des comètes, deviennent la preuve la plus convaincante de l'action mutuelle de toutes les molécules du système.

243. *Force relative d'une planète et du soleil.* — Supposons que cette planète et le soleil existent seuls; et cherchons la force qui produirait le mouvement relatif de l'un de ces corps par rapport à l'autre, par exemple de la planète par rapport au soleil. Si l'on pouvait regarder ces deux corps comme réduits à deux points géométriques, l'attraction subie par la planète serait le produit des deux masses, divisé par le carré de leurs distances, et multiplié par l'attraction à l'unité de distance, de deux masses égales à l'unité et réduites elles-mêmes à des points. Mais cette hypothèse est trop éloignée de la vérité pour être conservée, quoiqu'elle ait dû être faite dans une première approximation. Heureusement son influence est insensible dans le cas de l'attraction en raison inverse du carré de la distance, de sorte que cette circonstance ne peut pas introduire de complica-

tion dans la plupart des calculs, et n'a pu nuire à la découverte de la loi.

Newton a démontré, en effet, que *l'action d'une couche sphérique homogène, infiniment peu épaisse, dont tous les points attirent un point extérieur en raison inverse du carré de la distance, est la même que si toute la masse était réunie en son centre.*

Or les planètes sont sensiblement sphériques, et, par des raisons dont nous ne parlerons pas ici, on peut les considérer comme composées de couches homogènes, de densité variable, et, d'après le théorème précédent, leur attraction sur les points extérieurs peut être regardée comme la même que si la masse de toutes ces couches, ou de la planète entière, était réunie au centre. Et, par suite, les actions de deux planètes ou du soleil et d'une planète, etc., peuvent être regardées comme celles de deux points matériels situés aux centres des deux corps, et ayant leurs masses respectives.

Cela posé, si l'on désigne par m et M les masses de la planète et du soleil, par r la distance de leurs centres et par f l'attraction de deux unités de masse concentrées en deux points à l'unité de distance, l'attraction du soleil sur la planète aura pour expression

$$\frac{fm\text{M}}{r^2},$$

et comme la réaction est égale à l'action, ce sera aussi l'attraction de la masse de la planète sur celle du soleil.

Il suit de là que l'unité de masse de la planète subira une attraction égale à $\frac{f\text{M}}{r^2}$, et l'unité de masse du soleil en subira une égale à $\frac{fm}{r^2}$.

Or, d'après le principe du mouvement relatif, découvert par Newton, la force accélératrice relative de la planète

s'obtiendra en joignant à la force accélératrice $\frac{f\text{M}}{r^2}$, qui y est réellement appliquée, une force égale et contraire à la force accélératrice appliquée au soleil, et qui est $\frac{fm}{r^2}$ et dirigée vers la planète. Il faudra donc ajouter cette dernière dirigée vers le soleil, et la planète sera sollicitée vers le soleil regardé comme immobile par une force accélératrice égale à

$$\frac{f(\text{M}+m)}{r^2},$$

et l'on raisonnerait de la même manière pour le mouvement relatif d'un satellite et de sa planète.

244. *Remarque.* — La force accélératrice relative étant plus grande de $\frac{fm}{r^2}$ que si le soleil était immobile, il s'ensuit que cet effet varie d'une planète à l'autre ; et comme la force accélératrice est $\frac{4\pi^2 a^3}{\text{T}^2}$ à l'unité de distance pour le corps qui décrirait autour d'un centre fixe, dans le temps T, une ellipse ayant pour grand axe $2a$, il s'ensuit qu'on aura

$$\frac{4\pi^2 a^3}{\text{T}^2} = f(\text{M}+m)$$

et non

$$\frac{4\pi^2 a^3}{\text{T}^2} = f\text{M},$$

et, par conséquent, $\frac{a^3}{\text{T}^2}$ varierait d'une planète à l'autre, ce qui serait contraire à la troisième loi de Kepler. Or cette loi, résultant d'un nombre considérable d'observations, doit être regardée au moins comme extrêmement approchée ; d'où il suit nécessairement que le terme m est extrêmement petit par rapport à M, c'est-à-dire que les masses des planètes sont extrêmement petites par rapport à celle du soleil.

245. *Masses des planètes.* — Il est facile de déterminer le rapport de la masse d'une planète à celle du soleil, lorsque cette planète est accompagnée d'un satellite ayant une masse relativement très-petite. En effet, représentons par M la masse du soleil, par m, m' celles de la planète et de son satellite, par $2a$, $2a'$ les grands axes des orbites de la planète et du satellite, et par T, T′ les temps de leurs révolutions; on aura, d'après ce qui précède,

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M + m),$$

$$\frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} = f(m + m');$$

d'où

$$\frac{a'^3 T^2}{a^3 T'^2} = \frac{m + m'}{M + m}.$$

Or le second membre peut être regardé comme sensiblement égal à $\frac{m}{M}$, parce que m est très-petit par rapport à M, ainsi que m' par rapport à m. On peut donc écrire

$$\frac{m}{M} = \frac{a'^3 T^2}{a^3 T'^2}.$$

T et T′ sont connus par l'observation, et il suffit de connaître une valeur approchée de $\frac{a'}{a}$ pour en déduire, avec une approximation du même ordre, le rapport de la masse de la planète à celle du soleil. Newton a trouvé, par ce procédé, $\frac{1}{1067}$ pour le rapport de la masse de Jupiter à celle du soleil. Des procédés plus précis ont donné $\frac{1}{1050}$, ce qui en diffère très-peu.

246. La masse de la terre ne peut se déterminer très-exactement par la méthode que nous avons indiquée pour les planètes qui ont des satellites, parce que la masse de la lune ne peut être négligée par rapport à celle de la terre;

néanmoins cette méthode donnera un moyen de vérification lorsque l'on connaîtra le rapport de ces deux masses. Mais on peut parvenir à connaître la masse de la terre, par un autre moyen qui ne saurait être employé pour aucune autre planète, et qui résulte de la connaissance que nous avons de l'attraction qu'elle exerce sur les corps situés à sa surface. Cette attraction est égale à la pesanteur, augmentée de la composante verticale de la force centrifuge. De plus, il faut avoir égard à l'aplatissement de la terre, et l'on trouve que, sur le parallèle dont le carré du sinus de la latitude est $\frac{1}{3}$, et dont la distance r au centre de la terre a pour valeur $r = 6364551$, l'attraction G de la terre est sensiblement la même que si elle était sphérique et qu'elle eût r pour rayon. En la calculant d'après la loi de la variation de la pesanteur à la surface de la terre (*Mécanique céleste*), on trouve qu'elle a pour valeur 9,81645, ce qui est un peu supérieur à g.

Si donc on designe par m la masse de la terre, et par f l'attraction mutuelle de deux unités de masse, placées à l'unité de distance l'une de l'autre, on aura

$$G = \frac{fm}{r^2} = 9{,}81645.$$

On peut tirer de là la valeur de f, et la reporter dans la formule $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M + m)$ qui se rapporte au mouvement de la terre autour du soleil. Il en résulte

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \frac{Gr^2(M + m)}{m};$$

d'où

$$\frac{M}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{Gr^2 T^2} - 1.$$

Mais on a

$$T = 86400 \times 365{,}256374,$$

et la valeur de la parallaxe du soleil donne

$$a = 23984r,$$

en effectuant les calculs, on trouvera

$$\frac{M}{m} = 354592, \quad \text{ou} \quad \frac{m}{M} = \frac{1}{354592}.$$

Il est facile de déduire de là le rapport de la densité moyenne de la terre à celle du soleil. En effet, le diamètre du soleil est égal à 110 fois celui de la terre, et les densités de deux corps sont entre elles comme leurs masses divisées par leurs volumes; d'où l'on conclut facilement que la densité de la terre est à peu près quadruple de celle du soleil.

Si, d'après cela, on calcule la pesanteur à la surface du soleil, on trouve qu'une mêmemasse y pese 29 fois et demie autant qu'elle pèserait à la surface de la terre, et que les corps, abandonnés à la libre action de cette force, y parcourraient un espace d'environ 145 mètres dans la première seconde, tandis qu'à la surface de la terre l'espace qu'ils parcourent dans le même temps n'est que $\frac{g}{2}$.

247. Les masses des planetes qui n'ont pas de satellites ne peuvent être déterminées par le procédé du n° 245, et l'on a recours, pour cela, aux perturbations que leurs actions mutuelles introduisent dans leur mouvement autour du soleil. L'action d'une planète étant proportionnelle à sa masse, on conçoit *à priori* que le trouble apporté par cette action dans un mouvement produit par celle du soleil, peut conduire à la connaissance du rapport de la masse de cette planète à celle du soleil. Cette importante question est du ressort de la mécanique céleste, et nous nous bornons à l'indiquer. Ce procédé peut s'appliquer également aux planètes qui ont des satellites, et c'est ainsi qu'on a trouvé $\frac{1}{1067}$ pour la masse de Jupiter.

Les masses des satellites d'une même planète pourront de même être comparées à celles de leurs planètes, au moyen des perturbations que leurs actions mutuelles apportent à leur mouvement autour de cette planète; et l'on en déduira les rapports de leurs masses à celle du soleil, puisqu'on connaît celui de la masse de la planète à celle du soleil. Il y aurait encore ici une exception pour la terre, qui n'a qu'un satellite; mais on a aussi ce même avantage dont on a profité dans la recherche de la masse de la terre; c'est la connaissance de ce qui se passe à sa surface. En effet, la lune produit à cette surface des perturbations provenant de l'inégalité des distances du ce satellite aux différents points de la terre. Ces perturbations sont le flux et le reflux de la mer. Comme le soleil produit sur la mer des effets semblables, on conçoit que la comparaison de ces deux effets doit conduire au rapport des masses de la lune et du soleil. Or cette comparaison est facile par l'observation des marées lunaires et solaires dont les lois sont différentes. Nous nous bornerons à dire que le rapport de la première à la seconde est, dans le port de Brest, 2,3533 (*Mécanique céleste*); par un calcul que nous ne rapporterons pas, on en déduit le rapport de la masse de la lune à celle du soleil, et par suite à celle de la terre. On trouve ainsi que la masse de la lune est $\frac{1}{75}$ de celle de la terre.

248. *Marche suivie d'abord par Newton.*—Avant d'obtenir la démonstration que nous avons donnée de la loi de l'attraction, Newton l'avait entrevue par des considérations que nous allons indiquer, et qui, sans avoir le même degré de rigueur, ne laissaient pas que de donner de très-fortes inductions. Les satellites décrivent autour de leurs planètes respectives des orbites sensiblement circulaires, auxquelles s'appliquent les lois de Kepler; et les planètes décrivant des orbites d'excentricités différentes, on peut supposer,

par analogie, que les lois de Kepler, qui leur sont communes, s'appliqueraient encore au cas d'orbites circulaires : d'autant plus que les orbites réelles étant très-peu excentriques, on peut avec une assez grande approximation les regarder comme circulaires. Ainsi, on aura des résultats, sinon exacts, au moins fort approchés, en appliquant les lois de Kepler au cas d'orbites circulaires. Cela posé, la loi des aires indique toujours que la force qui agit sur chaque planète est dirigée vers le centre du soleil. La seconde loi, qui, dans le cas général, prouvait que, pour la même planète, la force accélératrice variait en raison inverse du carré de la distance, montre, dans le cas actuel, que la vitesse est constante ; car les arcs de cercle sont proportionnels aux secteurs et, par suite, au temps, Or, la force centripète, appliquée à l'unité de masse, a pour valeur $\frac{v^2}{R}$, v étant la vitesse, et R le rayon du cercle; elle est donc constante. Ainsi, dans ce cas particulier, comme on devait le prévoir, la seconde loi n'apprend rien relativement à la variation de la force avec la distance; mais elle en donne toujours l'expression, au moyen du temps T de la révolution entière de la planète et du rayon de son orbite. On a, en effet, $2\pi R = vT$, et, par conséquent, en désignant par φ la force centripète $\frac{v^2}{R}$, et substituant à v sa valeur en fonction de R et T, on aura

$$\varphi = \frac{4\pi^2 R}{T^2};$$

ce qui s'accorde avec la valeur générale $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}$, dans laquelle on supposerait $r = a = R$.

Passons maintenant à la troisième loi, qui, dans le cas général, étendait la loi d'attraction trouvée pour les diverses positions sur une même orbite, aux positions rela-

tives à des orbites différentes. Dans le cas actuel, le résultat analogue que nous allons trouver ne sera pas une extension, mais bien la première manifestation de cette même loi. Soient φ, φ' les forces accélératrices relatives à deux planètes quelconques, dont les distances au soleil sont R, R', et les durées des révolutions T, T'. On aura, d'après les valeurs de φ et φ',

$$\varphi : \varphi' :: \frac{R}{T^2} : \frac{R'}{T'^2},$$

or la troisième loi de Kepler donne

$$T^2 : T'^2 :: R^3 : R'^3.$$

Remplaçant dans le second rapport de la proportion précédente, T^2 et T'^2 par les quantités proportionnelles R^3, R'^3, elle devient

$$\varphi : \varphi' :: \frac{1}{R^2} : \frac{1}{R'^2};$$

ce qui prouve que la force appliquée à l'unité de masse varie en raison inverse du carré de la distance au centre du soleil.

Les satellites d'une même planète étant soumis aux mêmes lois, relativement à leur planète, on en conclut que l'attraction de la planète sur les satellites varie de même en raison inverse du carré de la distance au centre de la planète.

La terre, n'ayant qu'un satellite, ne pouvait fournir une vérification semblable de cette loi d'attraction; mais elle en offrait une autre à laquelle Newton s'est attaché immédiatement, et dont l'insuccès l'a arrêté pendant plusieurs années, par suite de la connaissance imparfaite que l'on avait alors du diamètre de la terre. Il ne reprit ses recherches sur la loi de l'attraction que lorsque Picard eut trouvé une valeur nouvelle de ce rapport, par des procédés plus exacts; nous allons indiquer la méthode qu'il suivit et qui,

cette fois, confirma pleinement la loi indiquée par ses premières recherches.

Il commença par demontrer cet important théorème, *qu'une couche sphérique homogène, d'une épaisseur infiniment petite, dont tous les points attirent un point extérieur en raison inverse du carré de la distance, donne la même résultante que si toute sa masse était réunie en son centre.*

En considérant donc la terre comme composée de couches sphériques homogènes, variant de densite suivant une loi quelconque, et dont toutes les molécules attirent les points exterieurs en raison inverse du carré de la distance, son action sur tout point extérieur sera la même que si toute sa masse était réunie au centre. Cette action sera donc en raison inverse du carré de la distance des points attirés à son centre.

La vérification de la loi annoncée par les planètes ayant des satellites, consistera donc à reconnaître que des masses égales placées l'une à la surface de la terre, l'autre au centre de la lune, sont attirées en raison inverse des carrés du rayon terrestre et du rayon de l'orbite lunaire, supposée circulaire. Or la distance des centres de la lune et de la terre ayant pour valeur moyenne 60 rayons terrestres, la pesanteur à la surface de la terre doit être 3600 fois plus grande que l'attraction exercée par la terre sur une même masse située sur la lune : ce même rapport doit donc exister entre les espaces parcourus dans un même temps par les corps tombant à la surface de la terre, et par la lune dans le sens de l'attraction de la terre.

Si, pour simplifier le calcul, nous considérons l'ellipse très-peu excentrique que décrit la lune, comme un cercle dont le rayon R soit égal à 60 fois le rayon r de la terre, supposée sphérique, la force centripète représentera l'action g' de la terre sur l'unité de masse de la lune. Cette

dernière est donc égale à $\frac{4\pi^2 R}{T^2}$, T étant la durée de la révolution de la lune autour de la terre, dont la valeur en secondes est 39343×60; on aura donc

$$g' = \frac{4\pi^2 r}{60(39343)^2},$$

expression qui dépend de la valeur r du rayon terrestre, tandis que la pesanteur g, à la surface de la terre, déterminée par les expériences du pendule ou de la chute verticale des corps, était évaluée en toise, indépendamment de la grandeur du rayon.

On voit ainsi comment une mesure inexacte de ce rayon pouvait empêcher la vérification, et c'est ce qui est arrivé. Mais, lorsque Newton apprit qu'une nouvelle mesure avait été faite avec beaucoup de soin par Picard, il reprit la théorie qu'il avait abandonnée pendant plusieurs années, et cette fois il trouva que l'attraction de la terre sur des masses égales placées à sa surface, et au centre de la lune, est en raison inverse des carrés de leurs distances au centre de la terre. Toute incertitude disparut alors, et sa foi, un instant ébranlée, n'en devint que plus vive; mais nous ne le suivrons pas dans l'exposition de toutes ses découvertes sur le système du monde, qui resteront comme le plus grand monument des temps modernes: nous nous sommes proposé seulement de faire connaître la méthode qu'il a enseignée pour l'étude des phénomènes naturels, et de montrer comment elle l'a conduit à loi générale de l'attraction, qui a fait de l'Astronomie ce que nous appelons une *science de raisonnement*.

CHAPITRE XVI.

MOUVEMENT D'UN SYSTÈME QUELCONQUE DE POINTS.

249. Nous avons vu précédemment comment les équations d'équilibre d'un système quelconque de points soumis à des liaisons déterminées par des équations quelconques, pouvaient être déduites d'une formule générale par des procédés de calcul réguliers, dépendants, dans chaque cas particulier, de la forme des équations qui en expriment les liaisons. Nous allons maintenant faire connaître une formule générale qui a le même avantage pour toutes les questions de mouvement.

Cette importante formule n'est que l'expression d'une proposition due à d'Alembert, et qui est la généralisation d'une idée conçue par Jacques Bernoulli pour la solution du problème du pendule composé. Cette proposition ramène la question du mouvement d'un système quelconque à celle de l'équilibre du même système. Et l'on conçoit alors comment la formule générale qui fournit les équations de l'équilibre, pourra conduire à la connaissance des équations du mouvement.

Nous allons exposer le principe de cette réduction, et nous en déduirons la formule générale du mouvement. Nous montrerons ensuite comment on en peut déduire, dans chaque cas particulier, les équations spéciales qui s'y rapportent.

PRINCIPE DE D'ALEMBERT.

250. Ce principe a pour objet, comme nous l'avons dit, de ramener la détermination du mouvement d'un système

quelconque à la considération de l'équilibre de ce même système.

Lorsque des points sont soumis à certaines liaisons, les forces qui leur sont appliquées ne leur donnent pas le même mouvement que s'ils étaient entièrement isolés et libres; mais si l'on pouvait évaluer les forces qui proviennent de ces liaisons, en les joignant pour chaque point à celles qui y sont directement appliquées, on pourrait les considérer tous comme entièrement libres et isolés. Désignons par m la masse de l'un quelconque d'entre eux, et par x, y, z ses coordonnées; les trois composantes de toutes les forces ainsi calculées devraient donc respectivement être égales à

$$m\frac{d^2x}{dt^2},\quad m\frac{d^2y}{dt^2},\quad m\frac{d^2z}{dt^2},$$

dont nous représenterons la résultante par Q.

Cela posé, soit P la force donnée qui agit sur le point m; appliquons à ce point la force Q, et une force égale et contraire Q_1, et agissons de même pour tous les autres points; rien ne sera changé ni dans le mouvement, ni dans les efforts exercés sur les différentes parties du système, puisque les forces introduites se détruisent deux à deux sur un même point, et par conséquent n'établissent aucune action entre deux points différents.

Mais le point m pourrait être considéré comme libre si l'on introduisait les forces que produisent sur lui les liaisons du système; donc ces dernières doivent exactement détruire P et Q_1, puisque la force Q produirait sur ce point libre le mouvement qu'il suit réellement. Et, en effet, si les forces P et Q_1 n'étaient pas détruites par celles qui proviennent des liaisons, elles se composeraient avec elles et donneraient une résultante qui, conjointement avec Q, devrait produire sur le point libre le même mouvement que la force Q seule; ce qui est absurde. D'où il suit que les

liaisons du système développent à chaque instant des forces qui font équilibre aux forces P et Q_1, relatives à tous les points. On peut donc énoncer le principe suivant, qui est dû à d'Alembert :

Dans le mouvement d'un système quelconque de points soumis à des liaisons quelconques, et sollicités par des forces quelconques, il y a équilibre à chaque instant, au moyen de ces liaisons, entre ces forces et des forces égales et directement opposées à celles qui produiraient sur chaque point matériel, supposé libre, le mouvement qu'il suit réellement, ou, en d'autres termes, entre ces forces et les forces d'inertie développées par chaque point du système.

Quant aux efforts exercés sur le système, ils peuvent varier à chaque instant, et sont produits par les forces variables qui s'y font continuellement équilibre.

251. Voyons comment ce principe conduit à la détermination du mouvement de chaque point, en fournissant autant d'équations qu'il y a de coordonnées indépendantes. Désignons par X, Y, Z les composantes connues de la force totale appliquée au point dont la masse est m, par X′, Y′, Z′ celles qui se rapportent au point m', et ainsi de suite, ces forces pouvant être nulles pour un nombre quelconque de ces points; d'après ce que nous avons dit, il devra y avoir à chaque instant équilibre sur le système entre ces forces et celles dont les composantes sont, pour chacun des mêmes points respectivement,

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\quad -m\frac{d^2y}{dt^2},\quad -m\frac{d^2z}{dt^2},$$

$$-m'\frac{d^2x'}{dt^2},\quad -m'\frac{d^2y'}{dt^2},\quad -m'\frac{d^2z'}{dt^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$x, y, z, x', \ldots$ désignant les coordonnées de ces différents

points. En d'autres termes, il doit y avoir équilibre entre les forces suivantes, appliquées respectivement aux points $m, m', \ldots$, parallèlement aux axes des coordonnées

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2}, \ldots,$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Y' - m'\frac{d^2y'}{dt^2}, \ldots,$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2}, \quad Z' - m'\frac{d^2z'}{dt^2}, \ldots.$$

Les conditions d'équilibre seront exprimées par l'équation suivante que donne le principe des vitesses virtuelles, en supposant les axes rectangulaires :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y \right. \\ \qquad\qquad \left. + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0. \end{array} \right.$$

$\delta x, \delta y, \delta z$ désignent les composantes du déplacement infiniment petit quelconque, que l'on pourrait faire subir au point (x, y, z), à un instant quelconque du mouvement, sans violer les conditions du système, telles qu'elles sont au moment même que l'on considère, et le temps n'étant pour rien dans la considération des déplacements, ou vitesses virtuelles, $\delta x, \delta y, \delta z$. Ainsi les équations qui expriment les liaisons du système, et dont nous désignerons le nombre par k, étant

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots,$$

les valeurs des coordonnées, après le déplacement virtuel, devront satisfaire à ces mêmes équations, dans lesquelles le temps t n'aura pas varié. La somme $\sum$ s'étend à tous les points matériels du système, et les quantités X, Y, Z seront supposées nulles pour ceux auxquels aucune force ne sera appliquée.

L'équation (1) renferme $3n$ variations, le nombre des points étant n; et elles doivent satisfaire aux k équations différentielles des équations données $L=0$, $M=0$, $N=0,\ldots$, ce qui donne

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dL}{dx}\delta x + \dfrac{dL}{dy}\delta y + \dfrac{dL}{dz}\delta z + \dfrac{dL}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \dfrac{dM}{dx}\delta x + \dfrac{dM}{dy}\delta y + \dfrac{dM}{dz}\delta z + \dfrac{dM}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Éliminant k variations, au moyen de ces équations, il n'en restera plus que $3n-k$ complétement indéterminées. En égalant à zéro les coefficients de chacune d'elles, on obtiendra $3n-k$ équations qui, jointes aux k premières, détermineront les coordonnées de tous les points en fonction du temps. Le problème se trouve donc ainsi ramené à l'intégration d'équations différentielles.

252. Si l'on multiplie les équations (2) par des indéterminées $\lambda, \mu, \nu,\ldots$, qu'on les ajoute à l'équation (1), et qu'on égale à zéro les coefficients de chacune des variations, on aura

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \nu\frac{dN}{dx} + \ldots = 0,$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \nu\frac{dN}{dy} + \ldots = 0,$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dz} + \mu\frac{dM}{dz} + \nu\frac{dN}{dz} + \ldots = 0,$$

$$X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dx'} + \mu\frac{dM}{dx'} + \nu\frac{dN}{dx'} + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on élimine les k indéterminées $\lambda, \mu, \nu,\ldots$, on obtiendra $3n-k$ équations différentielles du second ordre entre $x, y, z, x',\ldots$ et le temps t. Ces équations seront

équivalentes à celles que l'on aurait obtenues en éliminant k variations, comme nous l'avons d'abord indiqué; mais ce procédé a l'avantage que nous avons déjà reconnu, quand nous l'avons appliqué au principe des vitesses virtuelles, il détermine les forces dont les équations de condition tiennent lieu; et les valeurs des quantités λ, μ, ν,... feront connaître les efforts qu'éprouvent à chaque instant les liens qui assujettissent les points à satisfaire à ces équations.

Si le système est déterminé par d'autres variables que les coordonnées de ses points, on suivra toujours la même marche; et l'application du principe des vitesses virtuelles fera toujours connaître autant d'équations qu'il y a de variables indépendantes; de sorte qu'en les joignant aux équations de condition, on pourra toujours déterminer toutes les variables en fonction du temps : ce qui est précisément l'objet que l'on se propose.

253. *Détermination des constantes.* — Les constantes introduites par l'intégration des $3n-k$ équations différentielles, seront au nombre de $6n-2k$; et on les déterminera par les données de l'état initial, c'est-à-dire au moyen des positions de tous les points, ainsi que des grandeurs et des directions de leurs vitesses, à un certain instant, qu'on prendra pour origine des temps. Ces positions initiales ne sont pas entièrement arbitraires, parce que leurs coordonnées doivent satisfaire aux k équations données : de sorte qu'on ne peut se donner arbitrairement que $3n-k$ de ces coordonnées. De même aussi, les composantes de leurs vitesses doivent satisfaire aux k équations qu'on obtient entre $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$,..., en différentiant les k équations données; d'où il suit qu'on ne pourra se donner arbitrairement que $3n-k$ composantes des vitesses initiales. Ainsi, pour que l'état

initial soit complétement déterminé, ce qui est indispensable, il faut que l'on se donne $6n - 2k$ quantités, qui peuvent être choisies tout à fait arbitrairement; mais on ne peut pas s'en donner davantage.

Cela posé, quand on aura intégré le système des équations différentielles, on aura, pour déterminer toutes les coordonnées des n points, d'abord les k équations données, et ensuite $3n - k$ équations, renfermant $6n - 2k$ constantes arbitraires. Les $3n - k$ équations devant être satisfaites à chaque instant, on y fera $t = 0$, et on remplacera les coordonnées par leurs valeurs initiales; il en résultera $3n - k$ équations entre les constantes et les quantités connues; les k équations restantes seront nécessairement satisfaites, puisque l'on a dû choisir les coordonnées initiales de telle sorte que les liaisons exigées aient lieu. Différentiant ensuite les $3n - k$ équations entre les coordonnées, on en aura un égal nombre entre les composantes des vitesses; et, si l'on y substitue les valeurs initiales des coordonnées et de ces composantes, on aura $3n - k$ nouvelles équations entre les constantes arbitraires et des quantités connues. On aura donc ainsi $6n - 2k$ équations pour déterminer les $6n - 2k$ constantes; et alors les coordonnées de tous les points du système seront complétement déterminées en fonction du temps.

L'application de cette méthode à des exemples choisis est nécessaire pour en bien saisir l'esprit; mais nous renvoyons pour cela aux Traités spéciaux. Nous ne nous proposons ici que d'établir les idées fondamentales, et les théories qui constituent la partie élémentaire de la science des forces.

CHAPITRE XVII.

DU MOUVEMENT RELATIF D'UN SYSTÈME.

254. Si tous les points matériels qui composent le système étaient entièrement libres et indépendants les uns des autres, on rentrerait dans la théorie du mouvement relatif d'un point libre; et il suffirait d'introduire en chaque point les deux forces fictives, définies dans le n° 214, pour que le mouvement relatif du système fût ramené à un mouvement absolu.

255. Supposons maintenant que certains points du système soient assujettis seulement à rester sur des surfaces ou des courbes données, fixes ou mobiles, constantes ou variables de forme. Il en résultera pour ces points des forces inconnues normales à ces surfaces ou à ces courbes. Si l'on en connaissait les valeurs, en les joignant aux forces données, les points pourraient être considérés comme libres, et l'on rentrerait dans le cas précédent. Il suffirait donc d'introduire en chaque point les deux forces fictives dépendantes du mouvement des axes, et l'on serait encore ramené au mouvement absolu. Mais, bien que ces forces normales soient inconnues, on peut toujours les introduire comme si elles étaient connues. Le nombre des quantités à déterminer sera augmenté; mais le nombre des équations le sera également. En effet, les coordonnées d'un point assujetti à rester sur une surface doivent constamment satisfaire à l'équation de cette surface. Si le point est assujetti à rester sur deux surfaces, ou en d'autres termes sur une courbe donnée, il

s'introduit deux forces inconnues, normales à ces deux surfaces; mais, en même temps, on a deux équations entre ses coordonnées : de sorte que le nombre des équations augmentera toujours autant que celui des inconnues, et le problème sera entièrement déterminé. Les équations de ces surfaces ou de ces courbes pourront être données en fonction du temps et des coordonnées absolues ou relatives, et on les exprimera dans celui que l'on voudra de ces deux systèmes, au moyen des formules de la transformation des coordonnées.

256 Si deux points du système étaient assujettis à rester à une distance constante l'un de l'autre, comme cela arrive souvent, il naîtrait de là deux forces égales et contraires, dirigées suivant la droite qui joint ces points et appliquées respectivement à chacun d'eux. En introduisant ces forces, les points peuvent être considérés comme libres, mais on devra exprimer que leur distance est constante ; ce qui fournit une nouvelle équation en même temps qu'il s'est introduit une nouvelle inconnue qui est la grandeur de la force. Ces conditions peuvent se multiplier indéfiniment. Le même point peut être lié à un nombre quelconque d'autres points, et assujetti à rester sur une ou sur deux surfaces. Chacune de ces conditions introduira toujours une inconnue et une équation, et le problème sera déterminé. De ce qui précède, on déduit la proposition suivante :

Lorsque divers points d'un système en mouvement sont assujettis à rester à des distances constantes les uns des autres, ou à demeurer sur des surfaces ou des lignes variables de position et de forme, le mouvement de ce système relativement à trois axes mobiles, sera identique à un mouvement absolu qu'on déterminera de la manière suivante par rapport à des axes fixes : On fera partir le système d'un état initial identique à l'état relatif initial, on appli-

que l'on a d'abord en chaque point des forces dont les composantes seront exprimées par les mêmes fonctions du temps et des nouvelles coördonnées absolues, que les forces données le sont au moyen des coordonnées relatives; on y joindra les forces fictives telles qu'elles ont été déterminées dans le cas d'un point libre; enfin les points seront assujettis à conserver les distances données les uns avec les autres, et à se mouvoir sur des surfaces ou des courbes ayant pour équations, par rapport aux axes fixes, les équations données, exprimées en coordonnées relatives aux axes mobiles.

257. *Cas général.* — Les conditions que nous venons d'examiner sont celles qui se rencontrent le plus ordinairement. C'est pour cela seulement que nous les avons présentées en premier lieu, car nous aurions pu commencer par le cas, tout à fait général, dont nous allons maintenant nous occuper.

Supposons que les liaisons du système soient exprimées par des équations renfermant le temps et les coordonnées absolues $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', \ldots$, d'un nombre quelconque de points, M, M', M'',.... Nous avons démontré que le mouvement absolu sera le même que si l'on supprimait les liaisons et que l'on introduisit en chaque point des forces déterminées par les équations qui expriment ces liaisons. Ces forces, pour un point quelconque M ayant pour coordonnées x, y, z par rapport à un système quelconque d'axes, sont normales aux différentes surfaces que l'on obtient à l'instant que l'on considère, en regardant x, y, z comme seules variables dans toutes les équations où elles entrent; et les valeurs des composantes de ces forces, parallèlement aux x, y, z, sont les produits des dérivées partielles de ces équations, relativement à x, y, z, par un facteur commun qui n'est pas donné, et qui est le même

pour toutes les dérivées provenant de la même équation; en sorte qu'il y a autant de ces inconnues qu'il y a d'équations; et qu'il est possible, par conséquent, de déterminer, non-seulement les coordonnées de tous les points à chaque instant, mais encore les grandeurs et les directions des forces qui pourraient être substituées aux liaisons, et permettre ainsi de considérer tous les points comme entièrement libres.

Tout cela étant rappelé, il est clair que, si nous concevons introduites ces forces qui remplacent les liaisons, nous retombons dans le premier cas; et le mouvement relatif cherché coïncide avec un mouvement absolu dans lequel ces mêmes forces seraient ajoutées aux proposées et aux forces fictives qui se rapportent au mouvement relatif d'un point libre. Mais comme les forces provenant des liaisons renferment des inconnues nouvelles en nombre égal à celui des équations données, il faudra employer ces équations à leur détermination, afin d'avoir en tout autant d'équations que d'inconnues.

Observons maintenant que si, dans toutes ces équations où nous avons supposé qu'il n'entrait que des coordonnées absolues, on remplace celles-ci par des coordonnées relatives, au moyen des formules ordinaires de la transformation des coordonnées, rien ne sera changé dans les conditions des liaisons. Or, à un instant quelconque, on peut supposer qu'on prenne pour axes de coordonnées trois droites coïncidant avec les axes mobiles dans la position qu'ils occupent à cet instant. Les équations de liaison seront les équations proposées exprimées au moyen des coordonnées relatives. Les forces à introduire auront leurs composantes suivant ces axes, représentées par les dérivées partielles des équations par rapport aux coordonnées relatives, multipliées par des facteurs communs en même nombre que ces équations, comme nous l'avons rappelé en détail tout à l'heure. D'où l'on conclut la proposition suivante:

Le mouvement relatif d'un système de points, liés par des équations quelconques entre le temps et les coordonnées de ces points par rapport aux axes mobiles, est identique à un mouvement absolu du même système, en supposant : 1° qu'il parte d'un état initial identique à l'état relatif initial, 2° qu'il soit soumis à l'action des forces dont les composantes sont exprimées par les mêmes fonctions des coordonnées des points, que celles des forces données le sont au moyen des coordonnées relatives; 3° qu'on y joigne les forces fictives; 4° et en supposant enfin le système assujetti à des liaisons exprimées par des équations renfermant les coordonnées actuelles de la même manière que les équations données renferment les coordonnées relatives.

CHAPITRE XVIII.

CE QUE L'ON ENTEND PAR FORCES INSTANTANÉES — LEUR MESURE. — DÉTERMINATION DU MOUVEMENT QU'ELLES PRODUISENT. — SUPERPOSITION DE LEURS EFFETS

238. Nous avons démontré (n° 184) qu'une force constante pouvait être mesurée par la quantité de mouvement qu'elle a produite, divisée par le temps employé à la produire; d'où il résulte que, pour produire une quantité de mouvement déterminée, il faut que la durée de l'action soit d'autant moindre que la force employée est plus grande, mais qu'il n'y a aucune force qui puisse y parvenir sans employer un certain temps. Néanmoins, si l'effet est produit dans un temps si court, que rien n'ait pu changer sensiblement dans les positions des points, on pourra, dans la plupart des cas, faire abstraction de ce temps; et, pour indiquer cela, nous donnerons à la force le nom de *force instantanée*.

Pour mesurer, soit la valeur constante d'une pareille force, soit sa valeur moyenne, si elle est variable, on pourrait la rapporter à l'unité ordinaire, et l'on aurait pour mesure la quantité de mouvement produite, divisée par la durée de l'action. Mais cette durée n'étant pas appréciable, au moins dans le cas où il peut y avoir quelque utilité à considérer ce genre de force, il vaut mieux ne pas l'introduire dans la mesure, et se borner à la quantité de mouvement. On supposera alors à l'action la durée que l'on voudra, pourvu qu'elle soit extrêmement petite; les effets n'en dépendront nullement, comme nous allons le faire

voir en donnant le moyen de les calculer. Ainsi nous mesurerons une force instantanée par la quantité de mouvement qu'elle produit en agissant sur un point matériel libre en repos. Et, comme la décomposition des forces se fait de la même manière que celle des vitesses, il s'ensuit que les composantes d'une force instantanée, prises parallèlement à des directions données, d'après les mêmes règles que pour les forces continues, ne sont autre chose que les forces instantanées qui correspondraient aux composantes de la vitesse totale suivant les mêmes directions.

Enfin, comme les composantes de la vitesse d'un point matériel, parallèles à trois axes fixes, se trouvent augmentées par l'action de forces quelconques de la même manière que si la vitesse initiale était nulle, il s'ensuit que les composantes de la force instantanée qui agit sur un point matériel en mouvement, sont mesurées par les quantités de mouvement correspondantes aux accroissements des composantes de la vitesse de ce point.

259. Pour déterminer l'effet de forces instantanées sur un système quelconque déjà en mouvement, appliquons l'équation (1) à ces forces, en négligeant toutes les autres, qui ne peuvent produire aucun effet appréciable pendant la durée totale θ de ces actions, dont les unes peuvent cesser avant les autres. Les valeurs de $x, y, z, x', \ldots$ peuvent être regardées comme invariables pendant ce temps; et il est facile de voir qu'il en est de même de $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$. En effet, ces variations satisfont aux équations différentielles de $L = 0$, $M = 0, \ldots$, dans lesquelles t est considéré comme une constante. Or, cette constante ne changeant qu'infiniment peu, dans l'intervalle de temps que l'on considère, les quantités $\delta x, \delta y, \ldots$ ne peuvent changer que de quantités infiniment petites par rapport à elles-mêmes, et doivent par conséquent être considérées comme

invariables. Intégrons maintenant l'équation (1) par rapport à t, en prenant pour limites le commencement et la fin de l'intervalle θ; désignons par $m\mathrm{X}$, $m\mathrm{Y}$, $m\mathrm{Z}$ les composantes de la force appliquée au point dont la masse est m; et par $\Delta\frac{dx}{dt}$, $\Delta\frac{dy}{dt}$, $\Delta\frac{dz}{dt}$ les intégrales de $\frac{d^2x}{dt^2}dt$, $\frac{d^2y}{dt^2}dt$, $\frac{d^2z}{dt^2}dt$, qui sont les accroissements des quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; nous obtiendrons ainsi l'équation

$$\sum m\left[\left(\int \mathrm{X}dt - \Delta\frac{dx}{dt}\right)\delta x + \left(\int \mathrm{Y}dt - \Delta\frac{dy}{dt}\right)\delta y + \left(\int \mathrm{Z}dt - \Delta\frac{dz}{dt}\right)\delta z\right] = 0.$$

Or, la force appliquée à la masse m ayant pour composantes $m\mathrm{X}$, $m\mathrm{Y}$, $m\mathrm{Z}$, les intégrales $m\int \mathrm{X}dt$, $m\int \mathrm{Y}dt$, $m\int \mathrm{Z}dt$ sont les composantes de la quantité de mouvement que produirait cette force dans le temps θ, et, par conséquent, les composantes de la force *instantanée*, d'après le sens que nous attachons à cette dénomination. Si on les représente par X_1, Y_1, Z_1, l'équation précédente devient

$$(3)\quad \left\{ \sum\left[\left(\mathrm{X}_1 - m\Delta\frac{dx}{dt}\right)\delta x + \left(\mathrm{Y}_1 - m\Delta\frac{dy}{dt}\right)\delta y + \left(\mathrm{Z}_1 - m\Delta\frac{dz}{dt}\right)\delta z\right] = 0. \right.$$

Mais, si la masse m était libre, les composantes de la force instantanée qui changerait les composantes de sa vitesse, de la même manière qu'elles l'ont été, seraient

$$m\Delta\frac{dx}{dt},\quad m\Delta\frac{dy}{dt},\quad m\Delta\frac{dz}{dt}.$$

Donc l'équation (3) exprime qu'il y a équilibre entre les forces instantanées qui ont agi, et les forces instantanées, prises en sens contraire, qui produiraient le même changement dans le mouvement de chaque point s'il était entièrement libre ; ces dernières forces ne sont autre chose que les forces d'inertie correspondantes au changement brusque des vitesses. Le principe de d'Alembert s'applique donc aux changements brusques comme à ceux qui s'opèrent d'une manière continue dans le mouvement d'un système quelconque, en entendant que les forces instantanées se mesurent par la quantité de mouvement qu'elles communiqueraient à un point libre.

Il est important de remarquer que les accroissements des composantes des vitesses, ainsi déterminés, sont indépendants des grandeurs de ces vitesses, et sont les mêmes que si le système était en repos au moment où agissent les forces instantanées.

260. Lorsque l'on aura éliminé de l'équation (3) toutes les variations qui dépendent des autres, et qu'on aura égalé à zéro les coefficients de celles qui restent, les équations ainsi obtenues renfermeront linéairement les composantes des forces instantanées, et les accroissements des composantes des quantités de mouvement; et, de plus, aucun terme ne sera indépendant de ces quantités. Ces équations, jointes aux équations de condition, dont on déduira, par la différentiation, des équations renfermant linéairement à tous leurs termes les accroissements des composantes des vitesses, détermineront toutes les quantités inconnues $\Delta\frac{dx}{dt},\ldots$

Or, d'après la théorie des équations du premier degré, les dénominateurs de leurs valeurs seront indépendants de $X_1, Y_1, Z_1, X'_1, \ldots$, et leurs numérateurs les renferme-

ront linéairement et sans termes indépendants. Donc, si les forces instantanées varient toutes dans un même rapport, les accroissements des composantes des vitesses varieront dans ce même rapport. Et plus généralement, *si l'on considère autant de systèmes que l'on voudra de forces instantanées, les accroissements des composantes des vitesses de chaque point seront les sommes des accroissements qui correspondraient à chaque système de forces, agissant séparément sur le système des points en repos.*

On arriverait à la même conséquence sans s'appuyer sur la résolution des équations du premier degré, et par la seule observation que nous avons faite sur la forme des équations de la question.

Ainsi, les effets que produirait chacune des forces, si elle agissait seule, se produisent en même temps sans se nuire; ils se superposent les uns aux autres : et, en estimant les vitesses acquises suivant les mêmes directions, elles s'ajoutent pour former la vitesse totale acquise dans ces directions.

Et l'on voit encore que les vitesses, après l'effet des forces instantanées, sont les mêmes que si le système partait du repos et fût sollicité par les forces instantanées données, auxquelles on joindrait d'autres forces instantanées capables de communiquer au système en repos les vitesses dont ses différents points sont animés à l'instant que l'on considère.

OBSERVATION.

261. Si nous n'avions pour objet que de ramener la science des forces à celles qui ont été étudiées avant elle, notre tâche pourrait être considérée comme accomplie. En effet, nous avons trouvé une formule au moyen de laquelle toutes les questions de mouvement et d'équilibre, sur des systèmes exactement définis, sont ramenées à de pures

questions de calcul, en n'exigeant plus que les théories de la science des nombres et de la Géométrie.

Mais, indépendamment de l'intérêt que présente la solution de tous les problèmes particuliers de mouvement et d'équilibre, la science des forces renferme des propositions importantes, utiles par leur application à un grand nombre de questions particulières, mais qui se recommandent surtout par leur généralité même et par l'intérêt qui s'attache toujours aux grandes conceptions. Nous allons montrer comment elles peuvent être tirées du principe qui contient la science entière.

CHAPITRE XIX.

QUELQUES CONSÉQUENCES GÉNÉRALES DU PRINCIPE DE D'ALEMBERT.

262. Parmi les déplacements virtuels en nombre infini que l'on peut donner à un système, à une époque quelconque de son mouvement, il y en a quelques-uns qui, quoique insuffisants pour déterminer le mouvement même, peuvent néanmoins en faire connaître d'importantes propriétés.

Nous considérerons d'abord un système entièrement libre, dont les points sont soumis à des liaisons mutuelles quelconques, et sont sollicités par des forces extérieures quelconques. Dans ce cas, les déplacements virtuels que nous lui donnerons, seront ceux qui seraient possibles en laissant tous les points dans les mêmes positions les uns par rapport aux autres; ou, en d'autres termes, en concevant que le système devienne complétement rigide, avec la figure qu'il a au moment que l'on considère, et restant toujours entièrement libre.

Les équations que l'on tirera ainsi de la formule générale seront précisément celles qui exprimeraient l'équilibre du système devenu rigide, et sollité par les forces dont les composantes seraient, pour le point quelconque ayant la masse m,

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ces équations sont au nombre de six, et nous allons considérer d'abord les trois premières.

MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ.

Les trois premières équations de l'équilibre de ces forces sont

$$\sum\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0,\sum\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0,\sum\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)=0;$$

d'où l'on tire

$$(1)\quad \sum m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum X,\quad \sum m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum Y,\quad \sum m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum Z.$$

Les premiers membres de ces équations peuvent être transformés en introduisant les coordonnées x_1, y_1, z_1 du *centre de gravité* du système proposé, en entendant par là le point qui, à une époque quelconque du mouvement, deviendrait le centre de gravité du système, si on liait instantanément tous les points entre eux.

En effet, les coordonnées de ce point satisferont aux équations

$$(2)\qquad \sum mx=Mx_1,\quad \sum my=My_1,\quad \sum mz=Mz_1,$$

M désignant la somme totale des masses du système.

Ces équations ayant lieu à chaque instant, on pourra les différentier par rapport au temps, et l'on trouvera

$$(3)\quad \sum m\frac{dx}{dt}=M\frac{dx_1}{dt},\quad \sum m\frac{dy}{dt}=M\frac{dy_1}{dt},\quad \sum m\frac{dz}{dt}=M\frac{dz_1}{dt},$$

et, en les différentiant de nouveau,

$$(4)\quad \sum m\frac{d^2x}{dt^2}=M\frac{d^2x_1}{dt^2},\quad \sum m\frac{d^2y}{dt^2}=M\frac{d^2y_1}{dt^2},\quad \sum m\frac{d^2z}{dt^2}=M\frac{d^2z_1}{dt^2},$$

d'où, en vertu des équations (1),

$$(5)\quad M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\sum X,\quad M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\sum Y,\quad M\frac{d^2z_1}{dt^2}=\sum Z,$$

équations qui expriment que les composantes de l'accélé-

ration du mouvement du centre de gravité, sont identiques à celles que l'on trouverait pour un point dont la masse serait M, et qui serait sollicité par toutes les forces données, transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point. Si donc on supposait un point ayant un masse M, partant de la position initiale du centre de gravité, avec la même vitesse dans la même direction, ses coordonnées seraient déterminées par les mêmes équations que celles du centre de gravité, et ces deux points coïncideraient à chaque instant.

263. Considérons maintenant l'état initial du système proposé, et supposons qu'il soit produit par des forces instantanées appliquées à ce système en repos. Désignons par A, B, C les composantes de celle qui est appliquée au point m, par A', B', C' celles de la force appliquée à m', et ainsi des autres, ces forces pouvant d'ailleurs être nulles pour un nombre quelconque de ces points. Nous avons démontré qu'il y avait équilibre entre ces forces et les accroissements instantanés des quantités de mouvement, et, comme elles sont appliquées à des points en repos, ces accroissements seront les composantes mêmes des quantités de mouvement instantanément acquises. Désignons les composantes des vitesses initiales par

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dx'}{dt}\right)_0, \ldots,$$

il y aura équilibre sur le système proposé entre les forces

$$A - m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \quad B - m\left(\frac{dy}{dt}\right)_0, \quad C - m\left(\frac{dz}{dt}\right)_0, \ldots;$$

il y aura donc encore équilibre en rendant le système rigide, d'où résulteront les trois premières équations

$$\sum m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \sum A, \quad \sum m\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \sum B, \quad \sum m\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = \sum C,$$

et, d'après les équations (3) considérées à cet instant,

$$M\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_0 = \sum A, \quad M\left(\frac{dy_1}{dt}\right)_0 = \sum B, \quad M\left(\frac{dz_1}{dt}\right)_0 = \sum C.$$

On voit donc que les composantes de la vitesse initiale du centre de gravité sont les mêmes qu'elles seraient pour un point ayant la masse M, et sollicité par toutes les forces instantanées qui déterminent les vitesses initiales du système partant du repos, ces forces étant transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point. En réunissant ces deux propositions, on aura le principe suivant :

Le mouvement du centre de gravité d'un système libre quelconque est le même que si l'on y réunissait toutes les masses des différents points, et qu'on y transportât, parallèlement à elles-mêmes, les forces instantanées et les forces continues, qui produisent l'état initial et les états subséquents du système.

264. Il résulte de là que si aucune force extérieure n'est appliquée au système, et, plus généralement, si les forces qui y sont appliquées se détruisent quand on les transporte en un même point, le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme. Sa direction est donc celle de sa vitesse initiale, et, par conséquent, de la résultante des forces instantanées qui ont mis le système en mouvement; ou encore, des forces instantanées qui lui donneraient, à un instant quelconque, le mouvement dont il est animé.

Lorsque les points du système exerceront les uns sur les autres des actions réciproques, égales et contraires, continues ou instantanées, le mouvement du centre de gravité n'en sera pas altéré, puisque ces forces, transportées en ce point, s'y détruiraient deux à deux. Ainsi des chocs ou des liaisons subites établies entre plusieurs corps du système, ou encore des explosions intérieures, produisant

nécessairement des actions égales et contraires, ne sauraient modifier en rien le mouvement du centre de gravité. C'est en cela que consiste le principe de *la conservation du mouvement du centre de gravité.*

Il est essentiel d'observer que toutes les propositions précédentes sont *indépendantes de la nature des forces* et des lois de leur action.

PRINCIPE DE LA CONSERVATION DES MOMENTS ET DES AIRES.

265. Considérons maintenant les trois dernières équations d'équilibre, qui expriment que les sommes des moments des forces $X - m\frac{d^2x}{dt^2}$, $Y - m\frac{d^2y}{dt^2}$, $Z - m\frac{d^2z}{dt^2}$, etc., par rapport aux trois axes, sont nulles. Ces équations sont

$$\sum\left[y\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right) - z\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right] = 0,$$

$$\sum\left[z\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) - x\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right] = 0,$$

$$\sum\left[x\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) - y\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right] = 0,$$

et peuvent se mettre sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum(yZ - zY),\\ &\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \sum(zX - xZ),\\ &\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum(xY - yX).\end{aligned}\right.$$

Ces équations ont lieu à chaque instant du mouvement; elles expriment que les sommes des moments des forces données, par rapport aux trois axes, sont égales à celles des moments des forces qui produiraient sur les points libres le mouvement qui a lieu.

266. Nous nous occuperons particulièrement du cas où

les seconds membres des équations (1) sont nuls. Cela aura lieu d'abord si les forces X, Y, Z,... sont toutes nulles, c'est-à-dire si le système qui a été mis en mouvement est abandonné à lui-même, sans aucune action étrangère.

Cela aura lieu encore si les points sont soumis à des actions qui seraient en équilibre sur le système rendu rigide; car ces seconds membres sont les sommes des moments des forces par rapport aux axes : et ces sommes sont nulles si les forces sont en équilibre. Cela comprend le cas d'actions mutuelles égales et de sens contraires, et, par conséquent, de chocs quelconques entre les diverses parties du système.

Enfin, ces seconds membres sont encore nuls si toutes les forces appliquées aux divers points du système passent par un même point, choisi pour origine des coordonnées. En effet, les composantes X, Y, Z d'une quelconque d'entre elles étant proportionnelles aux coordonnées du point d'application, on aura

$$yZ - zY = 0, \quad zX - xZ = 0, \quad xY - yX = 0.$$

On voit même qu'il suffirait que les forces eussent une résultante passant par l'origine. De sorte que les seconds membres des équations (1) seront nuls toutes les fois que les forces seraient en équilibre sur le système rendu rigide, et lié au point fixe qui a été pris pour origine.

Le cas dont nous allons nous occuper a donc encore une assez grande généralité.

Les équations (1) deviennent, dans cette supposition,

$$(2)\quad \begin{cases} \sum m\left(y\dfrac{d^2z}{dt^2} - z\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) = 0, \\ \sum m\left(z\dfrac{d^2x}{dt^2} - x\dfrac{d^2z}{dt^2}\right) = 0, \\ \sum m\left(x\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2x}{dt^2}\right) = 0; \end{cases}$$

intégrant par rapport à t, et représentant par c, c', c'' trois constantes, on obtiendra

$$(3)\quad \begin{cases} \sum m\left(y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt}\right) = c, \\ \sum m\left(z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt}\right) = c', \\ \sum m\left(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\right) = c''. \end{cases}$$

Les premiers membres de ces équations sont les sommes des moments, par rapport aux axes, des forces dont les composantes seraient exprimées pour chaque point par $m\dfrac{dx}{dt}$, $m\dfrac{dy}{dt}$, $m\dfrac{dz}{dt}$, c'est-à-dire des forces instantanées, qui produiraient sur chaque point libre, et partant du repos, le mouvement dont il est animé.

Ainsi les équations (3) expriment que *les sommes des moments des quantités de mouvement qui animent le système à un moment quelconque, estimées par rapport à trois axes rectangulaires, sont constantes, et que, par conséquent, il en est de même par rapport à toute direction*. Ou, en d'autres termes, si à un instant quelconque, on considère les forces instantanées qui produiraient sur chaque point libre, et partant du repos, le mouvement dont il est animé, que l'on décompose chacune de ces forces en trois autres, dirigées suivant les axes des coordonnées, et en trois couples, ayant ces mêmes directions pour axes : la somme des moments des couples dans chacune de ces directions sera constante ; et, par suite, l'axe du couple résultant sera constant en grandeur et en direction.

C'est en cela que consiste le principe de la *conservation des moments*. Il subsiste, quelles que soient les actions mutuelles qui viendraient à naître entre des points du système, comme par exemple si deux points étaient liés subi-

tement l'un à l'autre, si une partie du système, d'abord gazeuse, devenait liquide, puis solide, pourvu que cela s'opérât par des actions deux à deux, égales et contraires; ou encore, si le changement de température de différents points d'un système changeait leurs actions mutuelles, et, par suite, leurs distances. Ces diverses circonstances se présentent dans le système du monde.

Il est inutile de rappeler que les sommes des moments seraient les mêmes pour tout système de forces instantanées, produisant sur le système proposé le mouvement existant, puisque, d'après le principe de d'Alembert, ces forces seraient en équilibre avec l'autre pris en sens contraire, sur le système tel qu'il est, et aussi après qu'on l'aura rendu rigide.

267. Il résulte de ce qui précède que si, à un instant quelconque, on considère comme des forces les quantités de mouvement qui animent les différents points du système, et qu'on les compose comme si elles étaient appliquées à un système rigide, on trouvera toujours la même résultante et le même couple résultant, par rapport à une même origine.

Si l'on applique à ces forces les propositions qui ont été établies dans la théorie de l'équilibre relativement à la réduction d'un système quelconque de forces, on obtiendra les conséquences suivantes :

Lorsqu'un système libre quelconque est sollicité par des forces qui se détruiraient mutuellement s'il devenait rigide,

La somme des forces représentées par les quantités de mouvement de ses différents points, estimés dans une même direction, est constante;

Le centre de gravité du système se meut parallèlement à la résultante des quantités de mouvement, transportées en un même point;

La somme des moments de ces quantités de mouvement par rapport à une même droite est constante.

Si l'on considère ces moments par rapport à toutes les droites qui passent par un même point de l'espace, celle pour laquelle la somme est la plus grande est invariable : c'est l'axe du couple résultant des quantités de mouvement, relatif à cette origine. Cette direction, ainsi que la valeur du moment total correspondant, sont les mêmes pour tous les points de la parallèle à la résultante, menée par ce même point. La direction peut être la même, sans que le mouvement soit le même; c'est lorsque les forces représentées par les quantités de mouvement sont réductibles à une force unique. Dans ce cas, tous les points du plan mené par cette force et le point que l'on considère, donneront une même direction pour l'axe du moment maximum; mais le moment ne sera le même en grandeur et en direction que pour les points d'une même parallèle à la résultante.

Il existe un *axe central* unique, parallèle à la résultante, et tel que pour tous ses points sa direction est celle de l'axe du moment maximum; et ce moment est moindre que le maximum relatif à tout autre point de l'espace. Il se détermine facilement dès qu'on connaît la résultante et le couple résultant relatif à une origine donnée. Dans le cas où le système des forces représentées par les quantités de mouvement est réductible à une force unique, la droite suivant laquelle elle agit est l'axe central.

268. *Conservation des moments dans le mouvement relatif.* — Supposons maintenant que les axes auxquels on rapporte la position des points, se meuvent en restant parallèles à eux-mêmes, le mouvement relatif sera identique au mouvement absolu qu'on obtiendrait en partant d'un état initial identique à l'état relatif initial, et intro-

duisant les forces fictives, déterminées précédemment. Dans le cas actuel, où les axes n'ont qu'un mouvement de translation, les forces fictives se réduisent, pour chaque point du système, à une force accélératrice égale, parallèle, et de sens contraire à celle qui donnerait à un point matériel libre le mouvement que suit l'origine des axes mobiles.

Lorsque ces forces réunies aux forces données seront en équilibre sur le système rigide, on donneront une résultante passant constamment par l'origine mobile, le principe de la conservation des moments aura lieu dans le mouvement relatif.

Supposons toujours que les forces données soient en équilibre sur le système rigide. Il sera nécessaire alors que les forces fictives soient en équilibre sur ce même système, ou bien qu'elles donnent une résultante qui passe constamment par l'origine mobile.

Or, ces forces se composent en une seule, appliquée au centre de gravité du système, parallèle et de sens contraire à la force accélératrice qui produirait le mouvement de l'origine, et égale au produit de cette force par la masse du système. Il est donc nécessaire et suffisant que cette dernière force soit nulle, pour que les autres soient en équilibre. Dans ce cas, l'origine a un mouvement rectiligne uniforme, entièrement arbitraire. On obtient ainsi la proposition suivante :

Lorsque les forces appliquées à un système libre s'y détruisent lorsqu'il devient rigide, le principe de la conservation des moments a lieu dans le mouvement relatif à tout système d'axes qui se meuvent parallèlement à eux-mêmes, de manière que leur point de rencontre ait un mouvement quelconque rectiligne et uniforme.

Le centre de gravité du système ayant, d'après l'hypothèse, un mouvement rectiligne uniforme, il s'ensuit que le

principe a lieu pour un système d'axes de directions constantes et dont l'origine coïncide constamment avec le centre de gravité du système.

Le même principe aura encore lieu lorsque la résultante des forces fictives, au lieu d'être nulle, passera constamment par l'origine; ce qui exige que la droite menée par le centre de gravité du système, parallèlement à la force accélératrice de l'origine, passe toujours par cette origine même.

On peut donc énoncer cette seconde proposition :

Le principe de la conservation des moments a lieu, dans le mouvement relatif, lorsque les axes se déplacent parallèlement à eux-mêmes, et que la force qui produirait le mouvement de l'origine passe constamment par le centre de gravité du système.

Ce principe a donc lieu dans le cas particulier où l'origine a *un mouvement arbitraire sur la droite que décrit le centre de gravité.*

Cette dernière proposition renferme, comme cas très-particulier, une des précédentes, où l'on supposait que l'origine était au centre de gravité lui-même.

On peut remarquer que le principe démontré dans ce numéro renferme celui du numéro précédent. Il suffit, pour l'obtenir, de supposer nulle la force dirigée vers le centre de gravité.

269. *Cas où le moment a la même valeur que si l'origine était immobile.* — Les deux propositions précédentes se rapportent seulement à l'invariabilité des moments relatifs; mais on pourrait ajouter encore la condition que ces moments fussent les mêmes que si l'origine restait en repos. Voyons s'il est possible d'y satisfaire.

Prenons pour axes fixes des x, y, z une des positions des axes mobiles; soient α, $\mathrm{6}$, γ les coordonnées de l'origine

mobile, à une époque quelconque. La somme des moments, par rapport à l'axe des x, sera

$$(a) \qquad \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right).$$

La somme des moments relatifs à l'axe mobile parallèle au précédent, sera

$$(b) \qquad \sum m[(y-\beta)d(z-\gamma) - (z-\gamma)d(y-\beta)].$$

On aura de même les moments relatifs aux deux autres axes, fixes ou mobiles.

Or, si l'on désigne par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité, et par M la masse totale du système, la différence des expressions (a) et (b) se réduit à

$$\mathrm{M}\left(z_1\frac{d\beta}{dt} - y_1\frac{d\gamma}{dt}\right) + \mathrm{M}\left(\gamma\frac{dy_1}{dt} - \beta\frac{dz_1}{dt}\right) + \mathrm{M}\left(\beta\frac{d\gamma}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt}\right).$$

Il s'ensuit que pour que les deux expressions (a) et (b) soient égales, il faut que l'on ait

$$z_1\frac{d\beta}{dt} - y_1\frac{d\gamma}{dt} + \gamma\frac{dy_1}{dt} - \beta\frac{dz_1}{dt} + \beta\frac{d\gamma}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt} = 0.$$

Or, on satisfera d'une manière particulière à cette équation en posant séparément

$$z_1\frac{d\beta}{dt} - y_1\frac{d\gamma}{dt} = 0, \quad \gamma\frac{dy_1}{dt} - \beta\frac{dz_1}{dt} = 0, \quad \beta\frac{d\gamma}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt} = 0,$$

ou

$$y_1 : z_1 :: d\beta : d\gamma, \quad \beta : \gamma :: dy_1 : dz_1, \quad \beta : \gamma :: d\beta : d\gamma.$$

En faisant de même pour les deux autres axes, on voit qu'on satisfera à toutes les conditions en posant

$$\alpha : \beta : \gamma :: d\alpha : d\beta : d\gamma :: dx_1 : dy_1 : dz_1 :: x_1 : y_1 : z_1,$$

ce qui exige seulement que le centre de gravité et l'origine

se meuvent sur une même droite passant par le point qui a été pris pour origine fixe.

On obtient ainsi la proposition suivante :

Lorsque l'origine se meut d'une manière quelconque sur la droite décrite par le centre de gravité du système, les moments relatifs ont la même valeur que si cette origine restait fixe.

On en déduit, comme cas particulier, cette autre proposition :

Les moments relatifs à des axes de directions constantes qui se meuvent, et se coupent au centre de gravité, sont les mêmes que si ces axes restaient immobiles dans une quelconque de leurs positions.

270. *Conservation des aires.* — Les équations (3) peuvent être envisagées sous un autre point de vue, et démontrent une propriété géométrique remarquable du mouvement en question. En effet, si l'on considère l'aire conique décrite par le rayon vecteur mené de l'origine au point dont les coordonnées sont x, y, z, elle se projette sur les plans coordonnés suivant les aires décrites par les projections de ce rayon, et dont nous allons calculer les expressions.

Soit θ l'angle formé avec l'axe des y positifs par la projection r du rayon vecteur sur le plan YZ, et qui tourne de l'axe des y positifs vers l'axe des z positifs, ce qui est le sens direct par rapport à l'axe des x positifs; on aura $\tang\theta = \frac{z}{y}$, les signes de toutes les quantités étant pris de la manière ordinaire.

On tire de cette équation

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{y\,dz - z\,dy}{y^2};$$

et, comme $y = r\cos\theta$, on aura

$$r^2 d\theta = y\,dz - z\,dy.$$

Donc $ydz - zdy$ est le double de la différentielle de l'aire décrite par le rayon r; elle est de même signe que $d\theta$, et, par conséquent, positive quand le mouvement est direct, et négative quand il est rétrograde.

Or, si l'axe de l'aire plane infiniment petite, décrite dans l'espace, fait un angle aigu avec l'axe des x, la projection du rayon vecteur sur le plan YZ, qui est d'ailleurs un plan quelconque, aura un mouvement direct; et si l'angle est obtus, ce mouvement sera rétrograde : donc $ydz - zdy$ est égal, en grandeur et en signe, au double de l'aire infiniment petite décrite dans l'espace, multiplié par le cosinus de l'angle formé par l'axe de cette aire avec l'axe des x positifs.

Cela posé, si l'on désigne par λ, λ', λ'' les sommes des aires décrites par les projections des rayons vecteurs sur les plans coordonnés, et multipliées chacune par la masse du point correspondant, les équations (3) pourront être mises sous la forme

$$\frac{d\lambda}{dt} = c, \quad \frac{d\lambda'}{dt} = c', \quad \frac{d\lambda''}{dt} = c'',$$

d'où

$$\lambda = ct, \quad \lambda' = c't, \quad \lambda'' = c''t,$$

en estimant les aires à partir de $t = 0$.

Ainsi, lorsque les points d'un système libre ne sont soumis qu'à leurs actions mutuelles, ce qui comprend les chocs entre les divers points du système; et, plus généralement, lorsqu'ils sont soumis à des forces qui seraient en équilibre sur le système devenu rigide, et lié invariablement à l'origine, ce qui comprend le cas de forces quelconques dirigées vers l'origine; la somme des projections sur un plan quelconque, des aires décrites par les rayons vecteurs de tous les points, multipliées respectivement par les masses de ces points, est proportionnelle au temps, pourvu que l'on re-

garde comme positives les aires décrites d'un mouvement direct, et comme négatives celles qui sont décrites d'un mouvement rétrograde. C'est en cela que consiste le *principe de la conservation des aires*. On voit qu'il ne diffère que par la forme, du principe de la conservation des moments.

271. S'il y avait deux centres d'action, lors même que l'un d'eux serait pris pour origine, les seconds membres des équations (1) ne seraient plus nuls. Mais l'un d'eux disparaîtra si l'on prend pour axe des x la droite qui passe par les deux centres fixes; car on aura

$$X:Y::x:y, \quad \text{ou} \quad xY-yX=0.$$

Donc, dans ce cas, le principe a lieu seulement pour les projections sur un plan perpendiculaire à la droite qui joint les deux centres d'action, et les couples provenant des quantités de mouvement du système, décomposés suivant les trois axes, donneraient un couple constant suivant l'axe qui passe par ces deux points.

272. *Plan invariable.* — Si l'on cherche le plan sur lequel la somme des projections des aires multipliées par les masses est la plus grande, on trouve, d'après les théorèmes démontrés dans les éléments, que les cosinus des angles p, q, r que la direction de son axe forme avec les axes de coordonnées, sont

$$\cos p = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2}},$$

$$\cos q = \frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2}},$$

$$\cos r = \frac{\lambda''}{\sqrt{\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2}},$$

ou

$$\cos p = \frac{c}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}},$$

$$\cos q = \frac{c'}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}},$$

$$\cos r = \frac{c''}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}}.$$

La direction de ce plan est donc indépendante du temps, et Laplace, qui l'a reconnu le premier, lui a donné le nom de *plan invariable*. Les équations (3) montrent qu'on pourra le déterminer si, à un certain instant, on connait les masses des différents points du système, leurs positions et les composantes de leurs vitesses. Les actions mutuelles des points, et les chocs qui peuvent survenir entre eux, ne changent pas la direction du plan invariable, puisque les seconds membres des équations ne cessent pas d'être nuls. Il en est de même s'il y a un centre fixe d'action, ou un point fixe, pourvu qu'on le prenne pour origine.

On voit que ce plan n'est autre chose que celui du couple résultant des quantités de mouvement; et toutes les propositions qui ont été établies pour ce dernier s'appliqueront identiquement à l'autre. Nous nous dispenserons de les rappeler, et nous renverrons pour beaucoup d'autres détails intéressants aux Traités spéciaux, et surtout aux Ouvrages de M. Poinsot.

273. *Application au système du monde.* — En considérant le soleil, les planètes et les satellites comme sollicités seulement par leurs actions mutuelles, le centre de gravité de ce système se meut uniformément en ligne droite, avec une vitesse qui dépend de celles qui ont été imprimées à tous ces corps, lorsqu'ils ont été abandonnés à eux-mêmes. Comme nous ne connaissons aucun point fixe, si nous vou-

lons prendre une origine des aires qui donne pour le plan du maximum des aires une direction invariable, il faut choisir un point qui se meuve parallèlement à la droite que décrit le centre de gravité; et comme cette droite n'est pas connue, il faudra choisir le centre de gravité lui-même. Le plan du couple résultant des quantités du mouvement relatives, ou, en d'autres termes, celui du maximum des aires relatives, pourra se déterminer à une époque quelconque; et comme il sera toujours le même, si l'on y rapporte tous les points du système, il pourra servir à comparer les observations astronomiques faites aux époques les plus éloignées.

Il est bon de remarquer que ce plan, étant indépendant de la grandeur des actions mutuelles, ne changerait pas, lors même que la loi d'attraction de la matière varierait; il est aussi indépendant des changements qui peuvent survenir dans la figure des corps célestes, parce qu'ils proviendront toujours de forces égales deux à deux et de sens contraire. Les parties liquides ou gazeuses pourraient se lier invariablement à la partie solide d'une planète; les planètes pourraient se lier entre elles ou se choquer d'une manière quelconque; elles pourraient être brisées par des explosions, sans que ce plan fût dérangé.

Il resterait encore le même si l'on supposait tous les corps du système sollicités par des forces parallèles et proportionnelles aux masses; car les mouvements rapportés à trois axes menés par le centre de gravité dans des directions constantes, ne seraient pas altérés, et, par conséquent, les aires projetées sur ces plans resteraient les mêmes.

ÉQUATION DES FORCES VIVES.

274. Cette équation s'obtient en considérant un déplacement virtuel particulier, qui n'est pas toujours compatible

avec les liaisons du système. C'est celui qui coïnciderait avec le déplacement qui s'opère pendant un temps infiniment petit, dans le mouvement réel de ce système.

Pour reconnaître quand ce déplacement virtuel est permis, soit $L = 0$ une des équations de condition données. Les déplacements virtuels satisferont à l'équation

$$\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx'}\delta x' + \ldots = 0,$$

et lors même que L renfermerait la variable t implicitement, on ne la ferait pas varier dans cette équation, puisque les déplacements virtuels se rapportent au même instant.

Si maintenant on désigne par dx, dy, dz, ..., les accroissements infiniment petits que prennent les coordonnées pendant le temps dt dans le mouvement effectif du système, l'équation $L = 0$ devant constamment être satisfaite, l'accroissement de son premier membre, après le temps dt, doit être nul, ce qui donne, en supposant, pour plus de généralité, que la variable t y entre explicitement,

$$\frac{dL}{dt}dt + \frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz + \frac{dL}{dx'}dx' + \ldots = 0.$$

Or ces deux équations seraient contradictoires si l'on prenait

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz, \ldots,$$

et cette équation ne sera permise que si l'on a $\frac{dL}{dt} = 0$, quel que soit t. D'où l'on conclut qu'on peut prendre pour déplacement virtuel le déplacement infiniment petit que subissent en même temps les points du système, en continuant leur mouvement, dans le cas seulement où aucune des équations de condition ne renferme le temps d'une manière explicite.

Supposons donc qu'il en soit ainsi, et, dans l'équation générale

$$\sum\left[\left(\mathbf{X}-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(\mathbf{Y}-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(\mathbf{Z}-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0,$$

faisons

$$\delta x = dx,\quad \delta y = dy,\quad \delta z = dz,$$

il vient

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx+\frac{d^2y}{dt^2}dy+\frac{d^2z}{dt^2}dz\right)=\sum(\mathbf{X}dx+\mathbf{Y}dy+\mathbf{Z}dz).$$

Or le premier membre est la moitié de la différentielle de

$$\sum m\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)\quad\text{ou de}\quad\sum mv^2,$$

v désignant la vitesse du point dont la masse est m; et par conséquent l'équation précédente peut s'écrire ainsi :

$$(1)\qquad \frac{1}{2}d\sum mv^2=\sum(\mathbf{X}dx+\mathbf{Y}dy+\mathbf{Z}dz).$$

Elle montre *que l'accroissement de la demi-somme des forces vives de tous les points dans un intervalle de temps infiniment petit, est égal à la somme algébrique des quantités de travail des forces données, développées dans ce même intervalle.*

275. Lorsque l'expression $\sum(\mathbf{X}dx+\mathbf{Y}dy+\mathbf{Z}dz)$ est la différentielle exacte d'une fonction φ de $x, y, z, x', y', z', \ldots$, considérées comme variables indépendantes, on pourra intégrer les deux membres de l'équation précédente, entre deux époques quelconques, et l'on aura

$$(2)\qquad \frac{1}{2}\sum mv^2-\frac{1}{2}\sum mv_0^2=\varphi(x, y, z, x', \ldots)-\varphi(x_0, y_0, z_0, x'_0, \ldots).$$

Ainsi, dans ce cas, l'accroissement de force vive peut se déterminer dès que l'on connaît les positions de tous les points, aux deux époques que l'on considère; et toutes les fois que le système repassera par une même position, la somme des forces vives reviendra la même.

Si les forces X, Y, Z sont nulles, le second membre de l'équation (2) est nul, et la somme des forces vives est constante. C'est en cela que consiste le principe de la *conservation des forces vives*.

276. Si tous les points du système sont soumis à l'action seule de la pesanteur, on aura

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g\,dm,$$

en prenant l'axe des z positifs en sens contraire de la pesanteur. L'équation des forces vives deviendra donc, en désignant par z_1 le z du centre de gravité du système, et par M sa masse totale :

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_1^2 = -gM(z_1 - z_0).$$

La somme des forces vives ne dépendra donc que de la hauteur du centre de gravité du système, et elle redeviendra la même toutes les fois que ce point repassera par le même plan horizontal.

277. Lorsque ce système passe par une position où il serait en équilibre si ses points n'avaient aucune vitesse, on a alors

$$\sum m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

pour tous les déplacements virtuels. Et, comme on peut prendre

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz,$$

il s'ensuit

$$\sum(\mathrm{X}dy + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = 0,$$

et, par conséquent, le second membre de l'équation (2), ayant sa différentielle nulle, sera, en général, maximum ou minimum relativement à toutes les valeurs par lesquelles il passe successivement. Ainsi, la somme des forces vives du système obtient ses valeurs maxima ou minima, lorsque le système passe par des positions où il serait en équilibre, si ses points y étaient placés sans vitesse.

278 Nous allons démontrer maintenant que l'expression

$$\sum(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$$

est une différentielle exacte quand les forces que l'on y considère sont des actions mutuelles entre les points du système, proportionnelles aux masses de ces points, et dépendant de leurs distances seulement.

En effet, soient x, y, z, x', y', z' les coordonnées de deux points dont les masses sont m, m', et dont la distance est f. Leur action mutuelle aura pour expression $mm'\mathrm{F}$, F désignant une fonction de f seulement, et les trois composantes de l'action exercée par m' sur m seront, en la supposant attractive,

$$mm'\mathrm{F}\frac{x'-x}{f},\quad mm'\mathrm{F}\frac{y'-y}{f},\quad mm'\mathrm{F}\frac{z'-z}{f},$$

et les termes provenant de ces composantes dans

$$\sum(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$$

seront

$$mm'\mathrm{F}\frac{(x'-x)dx + (y'-y)dy + (z'-z)dz}{f}.$$

Les termes provenant des composantes de l'action de m sur m' seront

$$mm'\text{F}\,\frac{(x-x')dx'+(y-y')dy'+(z-z')dz'}{f},$$

et, si on les réunit, on a

$$-mm'\text{F}\,\frac{(x-x')(dx-dx')+(y-y')(dy-dy')+(z-z')(dz-dz')}{f},$$

ce qui se réduit à $-mm'\text{F}df$, en ayant égard à l'équation

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=f^2.$$

On aurait trouvé $+mm'\text{F}df$ dans le cas d'une action répulsive. Ainsi, tous les termes provenant des actions mutuelles des points, seront des différentielles exactes, quand ces actions ne dépendront que de la distance et seront proportionnelles aux masses; et généralement quand elles seront égales et opposées.

Nous avons démontré précédemment qu'il en était de même pour toutes les forces agissant vers des centres fixes, proportionnellement à une fonction de la distance seulement.

Mais le théorème n'aurait plus lieu s'il existait des résistances de milieux ou de frottement : les forces X, Y, Z dépendraient alors, soit des composantes de la vitesse, soit de la pression contre les surfaces ou les lignes qui produisent le frottement, et

$$\sum(\text{X}dx+\text{Y}dy+\text{Z}dz)$$

ne serait plus une différentielle exacte.

On observera que la différentielle $-mm'\text{F}df$, qui se rapporte aux attractions mutuelles, est négative si df est positif, et positive si df est négatif. Donc les attractions mutuelles donnent un accroissement dans la somme des forces vives

quand les points se rapprochent, et une diminution quand ils s'éloignent. De même, si les actions sont répulsives, la somme des forces vives croîtra si les points s'éloignent, et décroîtra s'ils se rapprochent.

279. La somme des forces vives n'est pas altérée par le choc des points du système entre eux, lorsque les corps qui se choquent repassent après la compression par les mêmes états que pendant qu'elle s'opérait, et que la force répulsive qu'ils exercent l'un sur l'autre est la même pour les états semblables; car alors on a des actions mutuelles qui ne dépendent que des distances des points entre lesquels elles ont lieu.

Mais il n'en est plus de même, comme nous allons le voir, quand les corps qui se choquent ne satisfont plus à cette condition, c'est-à-dire quand ils ne sont plus *parfaitement élastiques*.

280. *Perte de forces vives produite par le choc.* — Supposons que les corps qui se choquent soient entièrement dénués d'élasticité, et désignons par a, b, c les composantes de la vitesse du point quelconque m avant le choc, et par A, B, C leurs valeurs après le choc qui a lieu entre des parties quelconques du système.

D'après le principe de d'Alembert, que nous avons démontré applicable aux forces instantanées, il devra y avoir équilibre entre les forces de choc, qui sont deux à deux égales et directement opposées, et celles dont les composantes seraient exprimées pour chaque point par

$$-m\Delta\frac{dx}{dt},\quad -m\Delta\frac{dy}{dt},\quad -m\Delta\frac{dz}{dt},$$

ou, d'après les notations précédentes, par

$$m(a-A),\quad m(b-B),\quad m(c-C).$$

Or, en appliquant le principe des vitesses virtuelles, on obtiendra une équation indépendante des forces inconnues que produit le choc, si l'on prend pour déplacement virtuel celui qui s'opérera réellement après que le choc sera terminé. En effet, les corps cesseront d'agir l'un sur l'autre lorsque leur vitesse sera devenue la même dans le sens de la normale commune; donc alors les moments virtuels des deux forces égales et contraires seront égaux et de signes différents; il est donc inutile d'y avoir égard dans la somme totale, et l'on aura l'équation

$$\sum m[(a-\mathrm{A})dx+(b-\mathrm{B})dy+(c+\mathrm{C})dz]=0.$$

Or

$$dx=\mathrm{A}dt,\quad dy=\mathrm{B}dt,\quad dz=\mathrm{C}dt;$$

donc

$$\sum m(a\mathrm{A}+b\mathrm{B}+c\mathrm{C}-\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2-\mathrm{C}^2)=0.$$

Soient

$$a^2+b^2+c^2=v^2,\qquad \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2=\mathrm{V}^2,$$
$$(a-\mathrm{A})^2+(b-\mathrm{B})^2+(c-\mathrm{C})^2=w^2,$$

d'où

$$a\mathrm{A}+b\mathrm{B}+c\mathrm{C}=\frac{v^2+\mathrm{V}^2+w^2}{2};$$

l'équation précédente devient alors

$$\sum m(v^2-\mathrm{V}^2-w^2)=0,\quad \text{ou}\quad \sum mv^2-\sum m\mathrm{V}^2=\sum mw^2;$$

ce qui prouve qu'il y a une perte de force vive, égale à la somme des forces vives relatives aux vitesses perdues. Cette proposition est connue sous le nom de *théorème de Carnot*.

L'auteur l'a étendu au cas où les corps qui se choquent ont un degré quelconque d'élasticité, mais la difficulté de connaître exactement ce degré en rend l'emploi presque impossible, dans l'état actuel de la science. Pour qu'on en

pût faire usage avec quelque confiance, il faudrait faire de nombreuses expériences, dont on ne s'est pas encore occupé.

La perte de forces vives étant $\sum mw^2$ dans le cas de corps sans élasticité, si l'on considère le système immédiatement avant et après le choc, les points n'ont pas changé sensiblement de position. En désignant donc par $x, y, z, x', \ldots$, les coordonnées de ces points, au moment où les corps viennent en contact, l'équation (2) deviendra, en ayant égard à la perte instantanée de forces vives,

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 \\ &= \varphi(x, y, z, x', \ldots) - \varphi(x_0, y_0, z_0, x'_0, \ldots) - \frac{1}{2}\sum mw^2. \end{aligned} \right.$$

Les équations (2) et (3) sont très-utiles dans le calcul de l'effet des machines. Nous nous bornerons à en indiquer cette application, dans les détails de laquelle nous ne pouvons entrer.

281. L'équation (2) prend une forme remarquable quand on y introduit les vitesses des points par rapport au centre de gravité du système.

En effet, soient x, y, z les coordonnées d'un quelconque de ces points par rapport à des axes fixes; ξ, η, ζ celles du même point par rapport au centre de gravité : on aura

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta;$$

et, par suite,

$$v^2 = \frac{dx_1^2}{dt^2} + \frac{dy_1^2}{dt^2} + \frac{dz_1^2}{dt^2} + \frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2} + 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right).$$

Si l'on désigne par u la vitesse du centre de gravité, par V

les vitesses dans le mouvement par rapport au centre de gravité, et que l'on observe que l'on a

$$\sum m\frac{d\xi}{dt}=0,\quad \sum m\frac{d\eta}{dt}=0,\quad \sum m\frac{d\zeta}{dt}=0,$$

on obtiendra, en représentant par M la masse totale du système,

$$(4)\qquad \sum mv^2=\sum mV^2+Mu^2$$

L'équation (2) donne ainsi

$$\frac{1}{2}\sum mV^2-\frac{1}{2}\sum V_0^2$$
$$=\frac{M}{2}(u_0^2-u^2)+\varphi(x,y,z,x',\ldots)-\varphi(x_0,y_0,z_0,x'_0,\ldots).$$

282. On peut encore faire, au sujet du centre de gravité, une remarque qui est souvent utile. Le mouvement de ce point étant le même que si toute la masse y était réunie, et que toutes les forces y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes, on obtiendra des propriétés du mouvement du centre de gravité d'un système, au moyen des propriétés du mouvement d'un point matériel sollicité par des forces données.

En considérant en particulier l'équation relative à la force vive d'un point matériel, et employant les mêmes notations que ci-dessus, on obtiendra

$$(5)\qquad \frac{1}{2}d.Mu^2=dx_1\sum X+dy_1\sum Y+dz_1\sum Z,$$

équation qui peut servir, dans bien des cas, à donner immédiatement l'expression de la vitesse u du centre de gravité. Nous allons en faire usage ici pour démontrer une propriété remarquable du centre de gravité d'un système.

L'équation (1) donne, en y remplaçant $\sum mv^2$ par sa va-

leur, tirée de l'equation (4),

$$\frac{1}{2}d.\sum m\mathrm{V}^2 + \frac{1}{2}d.\mathrm{M}v^2 = \sum(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz).$$

Or, si l'on désigne par ξ, η, ζ les coordonnées par rapport à des axes parallèles à ceux des x, y, z, et passant par le centre de gravité du système, on aura

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta,$$

et, par suite,

$$dx = dx_1 + d\xi, \quad dy = dy_1 + d\eta, \quad dz = dz_1 + d\zeta,$$

et l'équation précédente devient, en vertu de l'équation (5),

$$\frac{1}{2}d.\sum m\mathrm{V}^2 = \sum(\mathrm{X}d\xi + \mathrm{Y}d\eta + \mathrm{Z}d\zeta),$$

c'est-à-dire que l'équation des forces vives a lieu, par rapport au centre de gravité, comme si c'était un point fixe.

283. *Équation des forces vives dans le mouvement relatif.* — Considérons maintenant le mouvement du système par rapport à des axes mobiles. Ce mouvement est identique à un certain mouvement absolu que prendrait le système, sous les conditions définies dans le n° 254, et nous pouvons appliquer à ce dernier ce qui vient d'être démontré pour tout mouvement absolu.

Ainsi d'abord, *lorsque les équations de condition ne renfermeront pas explicitement le temps, l'accroissement de la demi-somme des forces vives relatives, dans un temps infiniment petit, sera égal à la somme des quantités de travail des forces relatives dans le même intervalle.*

Rappelons-nous maintenant que les forces relatives se composent des forces données et des forces fictives. Ces dernières consistent d'abord dans les forces d'inertie qui

seraient développées par chaque point du système, si on le liait aux axes mobiles, et ensuite à des forces perpendiculaires aux vitesses relatives, et dont le travail est, par conséquent, nul.

D'où l'on voit que *l'équation des forces vives a lieu dans le mouvement relatif, pourvu qu'on joigne aux forces données les forces d'inertie de chaque point, supposé lié aux axes mobiles, à l'instant que l'on considère*; ou, d'après les dénominations employées par M. Coriolis, *pourvu qu'on joigne aux forces données des forces égales et opposées aux forces d'entraînement pour chacun des points du système.*

Toutes les propositions que nous avons établies sur les forces vives dans le mouvement absolu, se trouvent donc applicables au mouvement relatif, au moyen de l'introduction de ces forces d'inertie fictives; et il est inutile d'en reproduire les énoncés.

N. B. — Il ne faut pas oublier que dans le mouvement absolu, qui est identique avec le mouvement relatif, les équations de liaison ne sont autre chose que les proposées exprimées au moyen des coordonnées relatives, dans lesquelles on substitue à ces dernières les coordonnées absolues prises dans le système des axes fixes que l'on a choisis; que l'état initial, dans ce système, est identique à l'état initial relatif aux axes mobiles; enfin, que les forces, tant données que fictives, que l'on considère dans ce mouvement absolu, sont exprimées au moyen des coordonnées qui s'y rapportent, de la même manière que le sont, au moyen des coordonnées relatives, les forces réellement données et les forces fictives considérées dans chaque position du système proposé.

APPLICATION À LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE POINTS.

284. L'équation des forces vives peut être appliquée à une question intéressante, celle de la stabilité de l'équilibre des systèmes.

Lorsqu'un système de points est en équilibre, et qu'on le déplace infiniment peu, d'une manière quelconque, en l'abandonnant ensuite à l'action des mêmes forces, il arrive de deux choses l'une : ou les déplacements successifs de chaque point par rapport à sa position d'équilibre, restent toujours très-petits, ou ils peuvent acquérir, au bout d'un certain temps, des valeurs finies. On dit, dans le premier cas, que l'équilibre est stable; et, dans le second, qu'il est instable.

Cela posé, considérons l'équilibre d'un système de points assujettis à des liaisons quelconques indépendantes du temps, et telles, que $\sum(Xdx + Ydy + Zdz)$ soit la différentielle exacte d'une fonction $\varphi(x, y, z, x', \ldots)$.

Nous savons que, dans la position d'équilibre, cette fonction sera, en général, maximum ou minimum relativement à toutes les variables indépendantes. Or nous allons démontrer que, quand elle est maximum, l'équilibre est stable.

Supposons, en effet, un système de points en équilibre, sous l'action de forces X, Y, Z, X',..., telles, que l'expression

$$\sum(Xdx + Ydy + Zdz)$$

soit la différentielle totale d'une certaine fonction $\varphi(x, y, z, x', \ldots)$ en considérant les variables $x, y, z, x', \ldots$ comme indépendantes. En vertu du principe des vitesses virtuelles, la différentielle de la fonction φ sera nulle pour

tous les déplacements infiniment petits du système, qui satisferont aux liaisons auxquelles il est assujetti. Supposons qu'alors cette fonction φ soit un maximum relativement à toutes les valeurs qu'elle prend dans ces divers déplacements. Désignons par $a, b, c, a', \ldots$ les valeurs de $x, y, z, x', \ldots$, dans la position d'équilibre; déplaçons chacun des points de quantités extrêmement petites, et communiquons-leur des vitesses très-petites; il s'agit de démontrer que le dérangement du système restera toujours très-petit, et que, par conséquent, l'équilibre sera stable.

En effet, posons

$$x = a + h,\quad y = b + k,\quad z = c + l,\quad x' = a' + h', \ldots,$$

et désignons par $v_0, v'_0, \ldots$ les vitesses très-petites que l'on a communiquées aux différents points, l'équation des forces vives deviendra

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 = \varphi(a+h,\ b+k,\ c+l, \ldots) \\ \qquad\qquad - \varphi(a+h_0,\ b+k_0,\ c+l_0, \ldots), \end{cases}$$

$h_0, k_0, l_0, \ldots$ représentant les déplacements primitifs très-petits, estimés parallèlement aux axes.

Or, puisque la fonction $\varphi(x, y, z, x', \ldots)$ est maximum, lorsque $x, y, z, \ldots$ ont des valeurs $a, b, c, \ldots$, les termes du premier degré en $h, k, l, \ldots$ disparaissent dans le développement de $\varphi(a+h, b+k, c+l, \ldots)$; et les termes du second ordre, changés de signe, peuvent se mettre sous la forme d'une somme de carrés de quantités dont chaque terme renferme, au premier degré, l'une des quantités $h, k, l, \ldots$, et qui sont en nombre égal à celui des variables indépendantes. Si l'on désigne ces diverses quantités par $s, s', s'', \ldots$, et par R l'ensemble des termes de degrés supérieurs au second, on aura

$$\begin{aligned} &\varphi(a+h,\ b+k,\ c+l, \ldots) \\ &\quad = \varphi(a, b, c, \ldots) - (s^2 + s'^2 + s''^2 + \ldots) + \mathrm{R}, \end{aligned}$$

et, de même,

$$\varphi(a+h_0,\ b+k_0,\ c+l_0,\ldots) = \varphi(a,\ b,\ c\ldots) - (s_0^2 + s_0'^2 + s_0''^2 + \ldots) + R_1.$$

L'équation (1) devient donc

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 = -(s^2 + s'^2 + s''^2 + \ldots) + (s_0^2 + s_0'^2 + s_0''^2 + \ldots) + R - R_0,$$

ou, en représentant par c la quantité très-petite

$$\frac{1}{2}\sum mv_0^2 + s_0^2 + s_0'^2 + s_0''^2 + \ldots - R_0,$$

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\sum mv^2 = c - (s^2 + s'^2 + s''^2 + \ldots) + R.$$

Les quantités $h, k, l, h', \ldots$ ne sont pas toutes indépendantes, et l'on pourrait en éliminer un certain nombre au moyen des équations qui expriment les liaisons du système. Celles qui resteraient entreraient au premier degré dans les divers termes des quantités $s, s', s'', \ldots$ dont le nombre est le même que celui de ces variables indépendantes. Il suit de là que si ces dernières ont des valeurs très-petites, il en sera de même de $s, s', s'', \ldots$, et réciproquement. Il suffit donc de démontrer que $s, s', s'', \ldots$ resteront constamment très-petites pour qu'il en résulte que les déplacements des points du système restent eux-mêmes très-petits, et que, par conséquent, l'équilibre est stable.

Or, le premier membre de l'équation (2) étant essentiellement positif, il en sera constamment de même du second, et il est facile d'en conclure que chacune des quantités $s^2, s'^2, \ldots$ restera toujours inférieure à c. En effet, d'après la valeur de c, chacune des quantités $s^2, s'^2, \ldots$ est d'abord moindre que c; elles varient ensuite d'une manière continue. Supposons qu'il puisse arriver alors que

l'une d'elles, par exemple s^2, devienne égale à c, et ce sera la plus grande de toutes ; elle sera encore très-petite, et il en sera de même, à plus forte raison, de toutes les autres. Donc h, k, l,... seront aussi très-petits, et la quantité R sera incomparablement moindre que chacune des quantités s^2, s'^2,... Donc l'hypothèse $s^2 = c$ conduirait à ce résultat absurde, que le second membre de l'équation (2) serait négatif. Les quantités s, s', s'',... restant donc toujours inférieures à $\sqrt{c}$, et, par conséquent, très-petites, il en sera de même des déplacements h, k, l,..., et l'*équilibre sera stable*.

Lorsque la fonction $\varphi(x, y, z, x',...)$ est un minimum, on ne peut faire des raisonnements analogues pour démontrer l'instabilité de l'équilibre, et il faut examiner spécialement chaque cas particulier.

APPLICATION DE LA MÊME ÉQUATION AU CALCUL DE L'EFFET DES MACHINES.

285. Les machines ne sont généralement utiles que lorsqu'elles sont en mouvement, et, dans ce cas, elles ont pour objet de surmonter certaines résistances, et de faire mouvoir leurs points d'application de telle sorte, que leurs déplacements, estimés suivant la direction de ces forces qu'il faut vaincre, soient en sens contraire de leur action ; on donne à ces forces le nom de *forces résistantes*. Celles que l'on emploie pour produire le mouvement se nomment *forces mouvantes*.

Le plus ordinairement, une machine n'est susceptible de prendre que deux mouvements différents, opposés l'un à l'autre, et dans lesquels la position d'un seul point détermine celle de tous les autres. Une seule équation suffit donc pour déterminer la loi de ce mouvement, dès qu'on connaît le sens dans lequel il a lieu ; et la plus commode à

employer est celle des forces vives. Cette équation est

$$(1)\quad \frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 = \int \sum (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

les sommes $\sum$ du premier membre s'étendant à tous les points du système, et la somme $\sum$ du second se rapportant à toutes les forces, soit mouvantes, soit résistantes, qui y sont appliquées. L'intégrale du second membre est prise entre deux limites quelconques, et v_0 et v sont les vitesses du point dont la masse est m, relativement à ces limites.

Les forces dont les composantes sont X, Y, Z se partagent naturellement en deux classes. Désignons par P l'une quelconque des forces mouvantes, et par dp le déplacement infiniment petit de son point d'application, estimé dans le sens de cette force; $\sum \mathrm{P}dp$ sera la partie de

$$\sum (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$$

correspondante aux forces mouvantes. Soient de même Q l'une quelconque des forces résistantes, et dq le déplacement de son point d'application estimé dans le sens de cette force et abstraction faite de tout signe; la partie correspondante aux forces résistantes sera $-\sum \mathrm{Q}dq$, et l'équation (1) pourra se mettre sous la forme

$$(2)\quad \frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 = \int \sum \mathrm{P}dp - \int \sum \mathrm{Q}dq.$$

286. Toute force peut être remplacée par un poids suspendu par un fil dont une extrémité sera fixée au point d'application de la force, et dont la direction, à partir de ce point, coïncidera avec celle de cette force, par le moyen d'une poulie de renvoi. Si l'on fait cette substitution à la

force P, lorsque la machine se déplacera infiniment peu, le poids égal à P descendra de la quantité dp qui désigne la projection du déplacement de l'extrémité du fil sur la direction de ce fil. Si l'on agit de même pour une quelconque des forces Q, dq exprimera la quantité dont s'élèvera le poids égal à Q pendant que le poids P s'est abaissé de dp.

Ainsi, en supposant d'abord toutes les forces constantes, l'équation (2) exprime que l'accroissement de la demi-somme des forces vives du système entre deux époques quelconques, est égale à la somme des produits des premiers poids par les hauteurs respectives dont ils se sont abaissés, moins la somme des produits des seconds poids par les hauteurs dont ils se sont élevés.

Nous désignerons, avec M. Coriolis, par *quantité de travail* le produit d'un poids par la hauteur dont il a été élevé ou abaissé, et, généralement, le produit d'une force quelconque par la projection du déplacement de son point d'application sur la direction de cette force. Si la force varie d'intensité, on décompose le mouvement en parties infiniment petites; les quantités de travail élémentaires qui leur correspondent dépendent de la loi que suit la variation de la force, et l'intégrale qui en exprime la somme est la quantité de travail relative au déplacement du point d'application de cette force.

Si l'on désigne par *travail moteur* celui qui se rapporte aux forces mouvantes, et par *travail résistant* celui qui se rapporte aux forces résistantes, l'équation (2) exprime que, quand le système passe d'une position à une autre, l'accroissement de la demi-somme des forces vives est égal à l'excès du travail moteur sur le travail résistant.

287. Si l'on considère la machine à partir de l'instant où elle était en repos, on a $v_0 = 0$, et l'équation (2) de-

vient

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 = \int \sum P dq - \int \sum Q dq;$$

le second membre est donc toujours positif, et par conséquent le travail moteur surpasse toujours le travail résistant. Ils seront égaux lorsque la machine reviendra au repos. Si le mouvement de la machine devient uniforme, ce qui est ordinairement le plus avantageux, et qu'on ne le considère qu'après que l'uniformité est établie, le premier membre de l'équation (2) est nul, et, par conséquent, le second l'est aussi : d'où l'on conclut que, dans un intervalle de temps quelconque, le travail moteur est égal au travail résistant. Mais, comme ce dernier se compose du travail que l'on avait en vue de produire et qu'on nomme le *travail utile*, plus le travail correspondant aux frottements, aux résistances des milieux, à la communication du mouvement aux corps environnants, etc., il en résulte que dans toute machine on est obligé de dépenser plus de travail que l'on n'en produit. La meilleure n'est que celle où l'on en perd le moins ; et l'avantage des machines en mouvement n'est que de transformer le travail, mais non de l'augmenter.

Lorsque les vitesses sont devenues constantes, il doit y avoir équilibre entre toutes les forces, et, en effet, l'équation

$$\int \sum P dp - \int \sum Q dq = 0$$

donne, en la différentiant,

$$\sum P dp - \sum Q dq = 0,$$

équation qui sera satisfaite si le système, quel qu'il soit, est en équilibre, et qui en est la condition suffisante, s'il est à liaison complète.

288. Lorsqu'on veut évaluer le travail correspondant au frottement d'un corps en mouvement, et que le contact n'a pas lieu en un point constant de ce corps, il ne faut pas regarder la force de frottement comme appliquée au point où le contact s'opère, et prendre la distance de deux points de contact consécutifs comme l'espace parcouru par le point d'application de la force. Il faut, pour faire usage du principe des forces vives, que les forces soient appliquées aux mêmes points matériels pendant ce temps très court relatif aux déplacements dx, dy, dz. Or, la force de frottement étant tangente au corps, peut être considérée comme appliquée au même point de ce corps, pendant un temps très-court, en négligeant une distance infiniment petite du second ordre. On devra donc prendre, dans l'évaluation du travail élémentaire dû à un frottement, le produit de la force de frottement par la projection du déplacement, dans l'espace, du point du corps qui était au contact à l'instant que l'on considère.

289. S'il y a des chocs entre certaines parties de la machine, que nous supposerons que l'on puisse regarder comme sensiblement dénuées d'élasticité, il y aura instantanément une perte de force vive, représentée par la somme des forces vives dues aux vitesses perdues par tous les points du système. Si l'on représente par u cette vitesse pour la masse quelconque m, les intégrales du second membre de l'équation (2) n'ayant pas varié sensiblement pendant la durée du choc, on aura, en désignant par v la vitesse de la masse m après le choc,

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 + \frac{1}{2}\sum mu^2 = \int\sum \mathrm{P}\,dp - \int\sum \mathrm{Q}\,dq;$$

de sorte que, pour maintenir les vitesses v à des valeurs déterminées, on sera obligé de dépenser une quantité de

travail plus grande de $\frac{1}{2}\sum mu^2$. Il est donc utile d'éviter les chocs autant que possible.

290. Lorsque le mouvement de la machine n'est pas uniforme, il faut du moins qu'il soit périodique. Dans ce cas, si les intégrales qui entrent dans l'équation (2) se rapportent à un nombre entier de périodes, on a $v = v_0$, et, par conséquent, le travail moteur est égal au travail résistant, comme si le mouvement était uniforme; et, réciproquement, si ces deux quantités de travail sont les mêmes dans l'intervalle qui s'écoule entre deux positions identiques quelconques du système, les vitesses redeviennent les mêmes après cet intervalle, et le mouvement est périodique. Mais il ne suffit pas d'obtenir une même quantité de travail, il est presque toujours très-important que ce travail soit produit uniformément. Il est presque impossible de parvenir à une uniformité rigoureuse, mais on peut rendre à peu près insensibles les changements de vitesse pendant le cours d'une période. Le moyen qu'on emploie le plus ordinairement consiste à introduire dans le système une masse assez considérable, à laquelle on donne le nom de *volant*, et dont l'effet est de diminuer les variations de vitesse correspondantes aux variations de la différence entre le travail moteur et le travail résistant. Pour que le volant charge moins les supports, il est utile qu'il ait la moindre masse possible, et pour cela on lui donne la forme d'une roue dont la masse est presque tout entière à la circonférence. Si l'on désigne par ω sa vitesse angulaire, la somme des forces vives de ses points pourra être représentée par $\mu\omega^2$, μ étant une constante dont il sera facile de déterminer la valeur, de quelque manière que soit répartie la masse du volant. Soit $\sum mv^2$ la somme des forces vives de toutes les autres parties de la machine, et

désignons par ω' et v' les valeurs de ω et v à une même époque; l'équation (2) pourra se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2}\sum m(v^2 - v'^2) + \frac{\mu}{2}(\omega^2 - \omega'^2) = \int\left(\sum \mathrm{P}\,dp - \sum \mathrm{Q}\,dq\right).$$

Prenons pour les deux limites des époques telles qu'il y ait le plus de différence possible entre $\int\sum \mathrm{P}\,dp$ et $\sum\int \mathrm{Q}\,dq$; il est facile de voir que ce sont celles où les forces seraient en équilibre sur la machine : car, à ces deux époques, les élements de l'intégrale qui forme le second membre changent de signe. Il en résulte que ces époques sont aussi celles du maximum et du minimum des vitesses. Or, plus μ sera grand, moins il faudra que ω et ω' soient différents, ainsi que v et v', pour que le premier membre soit égal au second; et l'on peut, dans chaque cas, déterminer le volant de manière que les changements de vitesse soient compris dans des limites suffisamment petites.

CHAPITRE XX.

PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION

291. Nous déduirons encore de la formule générale tirée du principe de d'Alembert, une proposition qui a eu une grande célébrité, surtout par le vague un peu mystérieux dont son auteur l'avait entourée. Cette proposition n'a lieu que dans les systèmes pour lesquels l'équation des forces vives subsiste. Il consiste en ce que si, pour chaque point du système, on intègre entre deux époques arbitraires le produit de sa quantité de mouvement par l'élément de la courbe qu'il décrit, la somme de toutes ces intégrales est un minimum; c'est-à-dire qu'elle est moindre que si, par de nouvelles liaisons, on assujettissait ces points à suivre de nouvelles courbes, entre les deux mêmes positions extrêmes que l'on considère, et sous l'influence des mêmes forces.

Pour le démontrer, il faut faire voir que la variation de cette somme est nulle quand on fait varier infiniment peu les points de ces courbes en leur laissant les mêmes extrémités; car il est évident, par la nature de cette somme, qu'en général elle ne peut avoir une valeur maximum, et que, par conséquent, en exceptant des cas très-particuliers, elle aura une valeur minimum.

Or on a

$$\delta\int\sum mv\,ds = \int\sum m\,\delta(v\,ds) = \int\sum m(\delta v . ds + v\,\delta\,ds).$$

Pour calculer la première partie, remplaçons ds par $v\,dt$,

dt se rapportant au mouvement qui a réellement lieu ; nous aurons

$$\delta v \cdot ds = v\,\delta v\,dt = \frac{1}{2}\,dt\,\delta v^2,$$

et, par suite,

$$\sum m\,\delta v . ds = \frac{1}{2}\,dt \sum m\,\delta v^2.$$

Mais on a, en désignant par C une quantité constante,

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 = \varphi(x, y, z, x', \ldots) + C,$$

et la forme du second membre sera la même pour tous les mouvements que l'on considère, puisque les forces restent les mêmes. Si donc on prend la variation des deux membres, on aura

$$\frac{1}{2}\sum m\,\delta v^2 = \frac{d\varphi}{dx}\,\delta x + \frac{d\varphi}{dy}\,\delta y + \ldots$$

$$= \sum (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z);$$

et, d'après l'équation générale du mouvement, cette dernière expression est égale à

$$\sum m\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\,\delta z\right) dt.$$

On aura donc

$$\sum m\,\delta v . ds = \sum m\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\,\delta z\right) dt.$$

Pour calculer la seconde partie, nous observerons que l'équation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

donne

$$ds\,\delta ds = dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz,$$



et, par suite,

$$v\delta ds = \frac{dx}{dt}\, d\delta x + \frac{dy}{dt}\, d\delta y + \frac{dz}{dt}\, d\delta z.$$

Donc

$$\sum mv\delta ds = \sum m\left(\frac{dx}{dt}\, d\delta x + \frac{dy}{dt}\, d\delta y + \frac{dz}{dt}\, d\delta z\right);$$

et, en réunissant les deux parties de la variation de $\sum mvds$, il vient

$$\delta \sum mv ds = \sum md\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z\right).$$

Si maintenant on intègre les deux membres, on aura

$$\delta \int \sum mv ds = \sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z\right) + C';$$

mais, aux deux limites de l'intégrale, les variations δx, δy, δz sont nulles, puisque les extrémités des courbes décrites restent les mêmes; donc le second membre est nul, et l'on a

$$\delta \int \sum mv ds = 0,$$

comme il fallait le démontrer.

D'où l'on conclut que l'intégrale

$$\int \sum mv ds, \quad \text{ou} \quad \int \sum mv^2 dt$$

est un minimum dans le mouvement du système.

292. Si les points ne sont soumis à l'action d'aucune force, on a



$$\sum mv^2 = h,$$

h étant constant.

Donc

$$\int \sum mv^2 dt = ht + C_1 = h(t - t_1),$$

t et t_1 étant les valeurs du temps aux deux limites; et, comme l'intégrale est un minimum, il s'ensuit qu'il en est de même de $t - t_1$, et que, par conséquent, le système passe d'une position à une autre dans moins de temps que si l'on introduisait de nouvelles liaisons quelconques.

Si l'on considère un point matériel assujetti à rester sur une surface fixe, sans être soumis à l'action d'aucune force, sa vitesse est constante; et le temps qu'il met à passer d'un point à un autre étant un minimum, il s'ensuit que la longueur de la ligne parcourue est aussi minimum, comme nous l'avons déjà démontré d'une autre manière.

CHAPITRE XXI.

QUELQUES MOTS SUR DEUX IMPORTANTES QUESTIONS DE MOUVEMENT.

203. L'objet que nous nous sommes proposé dans cet Ouvrage a été de montrer comment la *science des forces* a pu devenir ce que nous avons nommé une *science de raisonnement*. Pour cela, nous avons d'abord établi, au moyen de l'expérience, les données fondamentales et les principes auxquels nous avons attribué un caractère de généralité absolue. Nous n'avons pas dissimulé que cette généralité a quelque chose d'hypothétique, et n'est qu'une grande probabilité, suffisante pour servir de point de départ, mais qu'il est bon de confirmer, quand cela se peut, par l'accord de ses conséquences avec les faits observés.

En admettant ces données comme certaines, nous sommes parvenu par un enchaînement de propositions évidentes à ramener toutes les questions dépendant de l'action des forces, à de pures questions de géométrie et de calcul : en d'autres termes, la science des forces a été ramenée aux deux sciences précédemment étudiées, celles des nombres et de l'étendue. Nous pouvions donc regarder notre objet comme entièrement rempli ; mais nous avons cru utile de déduire, de la formule qui renfermait la science entière, certaines propositions générales, intéressantes par elles-mêmes et utiles dans la solution de beaucoup de questions importantes. Toutefois nous n'avons pas jugé à propos d'entrer dans le détail de problèmes particuliers, si utiles cependant pour l'intelligence parfaite des théories géné-

rales, mais pour lesquels nous avons cru devoir renvoyer aux Traités spéciaux.

Néanmoins, parmi toutes les questions auxquelles la théorie générale pouvait être appliquée, il en est deux dont nous ne pouvons nous dispenser de dire au moins quelques mots.

La première se rapporte au mouvement d'un système rigide composé d'un nombre fini ou infini de points, et formant ce qu'on appelle un *corps solide*.

La seconde se rapporte au contraire à un système de points libres, sans aucune liaison entre eux, mais exerçant les uns sur les autres des actions mutuelles égales et de sens contraire, dirigées suivant la droite qui les joint.

Cette dernière question est celle du mouvement relatif des planètes, considérées comme réduites à de simples points matériels, ce qui est suffisamment approché.

La première se rapportera au mouvement réel de chaque planète, en ayant égard à sa forme et à ses dimensions.

Nous ne nous proposons que d'indiquer très-succinctement la marche suivie pour la solution de ces deux questions générales, notre but n'étant toujours que de faire connaître l'enchaînement des principes et des propositions qui constituent les éléments de chaque science. Nous nous occuperons d'abord du mouvement d'un corps solide sollicité par des forces quelconques, et nous le considérerons dans trois conditions différentes : nous supposerons en premier lieu, que deux de ses points sont fixes, de sorte qu'il ne puisse que tourner autour de la droite qui les renferme; nous supposerons ensuite qu'un seul de ses points est fixe, et enfin qu'il est entièrement libre.

CHAPITRE XXII.

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE.

294. Considérons un corps solide dont la forme et la densité en chacun de ses points sont données, et qui est lié invariablement avec un axe fixe, autour duquel il peut tourner librement. Tous ses points, ou seulement un nombre fini d'entre eux, sont sollicités par des forces données; et il s'agit de déterminer le mouvement de tous les points de ce corps, en supposant que l'on donne les vitesses initiales de ses points, ou que l'on connaisse seulement les forces instantanées qui les ont produites.

Pour cela, on concevra un plan passant par l'axe et lié au corps; la position de ce plan déterminera celle de tous les points; et, par conséquent, le problème se ramène à la détermination de ce plan. Si les forces données ne sont pas comprises dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, on peut toujours les décomposer en deux, dont l'une soit parallèle à cet axe, et l'autre dans un plan perpendiculaire; la première sera détruite par la résistance de l'axe, et l'on peut en faire abstraction dans la recherche du mouvement. Nous supposerons donc que toutes les forces données agissent dans des plans perpendiculaires à l'axe fixe.

D'après la méthode générale, on doit exprimer qu'il y a équilibre entre les forces données et les forces d'inertie de tous les points du système. Ces dernières sont, pour l'élément de masse dm situé au point dont les coordonnées sont x, y, z,

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,dm, \quad \frac{d^2y}{dt^2}\,dm, \quad \frac{d^2z}{dt^2}\,dm;$$

mais il vaudra mieux, dans le cas actuel, considérer les

deux composantes, tangente et normale : la première est celle qui donne l'accroissement de vitesse, la seconde est la force centripète, et se trouve détruite par la résistance de l'axe, puisque chaque point décrit un arc de cercle dont le centre est sur cet axe. On peut donc se borner à considérer la première de ces forces, qui est tangente à l'arc décrit, et représentée par $\frac{dv}{dt}\,dm$, en désignant par v la vitesse et par dm la masse de ce point. Si l'on désigne par r la distance de ce point à l'axe, et par θ l'angle formé par le plan lié au corps, avec un plan fixe passant aussi par l'axe, on aura

$$v = r\frac{d\theta}{dt}, \quad \text{et, par suite,} \quad \frac{dv}{dt} = r\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Les points situés à l'unité de distance de l'axe auront pour vitesse $\frac{d\theta}{dt}$, c'est ce qu'on nomme la *vitesse angulaire du système*.

Pour la généralité de ces formules, la vitesse devra être considérée comme positive lorsque l'angle θ croîtra, et la force sera positive quand elle tendra à faire croître cet angle. Or la condition d'équilibre d'un corps solide autour d'un axe fixe consiste en ce que la somme algébrique des moments des forces par rapport à cet axe soit nulle, en considérant comme positifs les moments des couples qui tendraient, par exemple, à augmenter l'angle θ, et comme négatifs ceux qui tendraient à le diminuer. Si donc on désigne par P l'une quelconque de forces données, et par p sa distance à l'axe, l'équilibre entre les forces P et les forces $-r\frac{d^2\theta}{dt^2}$ conduira à l'équation suivante :

$$\sum \mathrm{P}p - \sum r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\,dm = 0,$$

les sommes se rapportant à tous les points du corps.

Dans le dernier terme de cette équation, le facteur $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ peut sortir en dehors du signe $\sum$, et ce terme devient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\sum r^2 dm.$$

L'équation précédente deviendra donc

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{\Sigma Pp}{\Sigma r^2 dm}.$$

En général, les moments des forces données varieront avec la position du corps; si ces forces ne dépendent que de la position des points, leurs moments seront des fonctions connues de θ, et il en sera de même par suite de $\sum Pp$. Quant à la somme $\sum r^2 dm$ qu'on appelle le *moment d'inertie du corps par rapport à l'axe*, elle ne dépend que des distances invariables des différents points du corps à cet axe. Nous représenterons cette constante par Mk^2, M désignant la masse totale du corps; k^2 sera la moyenne arithmétique des valeurs de r^2, en prenant les dm égaux. L'équation différentielle du mouvement sera alors

(1) $$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{\Sigma Pp}{Mk^2}.$$

Si ces forces étaient nulles, $\sum Pp$ serait nul et l'on aurait

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=0.$$

Pour effectuer l'intégration de l'équation (1) représentons son second membre par $\varphi(\theta)$, elle devient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\varphi(\theta);$$

multipliant les deux membres par $2d\theta$, et intégrant à partir de la valeur initiale θ_0 de θ, on aura

$$(2)\qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\int_{\theta_0}^{\theta}\varphi(\theta)d\theta + \omega^2,$$

ω étant la valeur initiale de la vitesse angulaire; on tirera de là

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{2\int_{\theta_0}^{\theta}\varphi(\theta)d\theta + \omega^2}}.$$

Si l'on peut effectuer cette quadrature, on aura t en fonction de θ; et la constante qui s'introduira sera déterminée en exprimant qu'on a à la fois

$$t = 0, \quad \theta = \theta_0.$$

295. Si les forces données sont telles, que l'équation des forces vives ait lieu, elle conduira immédiatement à l'équation (2), parce que la vitesse d'un point situé à la distance r de l'axe étant $r\frac{d\theta}{dt}$, la somme $\sum mv^2$ aura pour expression

$$\sum mr^2\frac{d\theta^2}{dt^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{d\theta^2}{dt^2}\sum mr^2.$$

Exprimant ensuite le second membre de l'équation des forces vives en fonction de la seule variable θ, ce qui sera toujours possible, on connaîtra $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ en fonction de θ, et l'on trouvera ainsi l'équation (2).

296. Considérons en particulier le cas d'un corps pesant qui peut se mouvoir autour d'un axe horizontal, et constitue ce que l'on appelle un *pendule composé*. Nous prendrons l'axe fixe pour axe des y, et l'axe des z en sens con-

traire de la pesanteur. Nous considérerons l'angle θ comme formé par le plan qui passe par l'axe fixe et le centre de gravité du corps, avec le plan vertical YZ, et nous supposerons que cet angle croisse en allant de l'axe des z positifs vers l'axe des x positifs, c'est-à-dire dans le sens que nous sommes convenus de choisir pour celui du mouvement direct. Le moment relatif à l'élément dm sera $gx\,dm$, car il tend à augmenter l'angle θ quand x est positif, et à le diminuer quand x est négatif; l'équation (1) deviendra donc

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g\Sigma x\,dm}{\mathrm{M}k^2},$$

ou, en désignant par x_1 l'abscisse du centre de gravité du corps, et par l la distance de ce point à l'axe,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{gx_1}{k^2}.$$

Or on a

$$x_1 = l\sin\theta,$$

et, par suite,

$$(3) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{gl}{k^2}\sin\theta.$$

Cette équation est de même forme que celle qui déterminerait le mouvement d'un point matériel autour de l'origine dans le plan XZ. Si l'on désigne par R la distance de ce point mobile à l'origine, ou la longueur de ce pendule simple, on obtient pour l'équation de son mouvement,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{\mathrm{R}}\sin\theta.$$

Cette équation se déduirait de la précédente, en supposant toute la masse réunie en un même point situé à une distance R de l'axe. Elle coïncidera avec la précédente si l'on

pose

$$R = \frac{k^2}{l}.$$

Si donc on suppose que pour $t = 0$ les valeurs de θ et de $\frac{d\theta}{dt}$ soient les mêmes de part et d'autre, c'est-à-dire si le plan qui passe par le centre de gravité du corps et l'axe fixe, fait d'abord le même angle avec la verticale, et a la même vitesse initiale que ce pendule simple, leur mouvement sera constamment le même. La longueur de ce dernier est ce que l'on appelle la *longueur du pendule composé*. Le mouvement d'un corps solide pesant autour d'un axe fixe étant ainsi ramené à celui du pendule, nous nous bornerons à renvoyer à la discussion qui se rapporte à ce dernier.

297. Faisons à ce cas particulier l'application que nous venons d'indiquer généralement du principe des forces vives. On a alors

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g\,dm,$$

pour les composantes de la force appliquée à un élément quelconque dm de la masse; l'équation des forces vives devient donc

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \sum mr^2 = -2\sum\int g\,dm\,dz = -2g\sum z\,dm + C,$$

C désignant une constante arbitraire. Mais, en représentant par z_1 le z du centre de gravité du corps, on a

$$\sum z\,dm = Mz_1 = Ml\cos\theta.$$

Si l'on détermine la constante par la condition que les valeurs initiales de θ et de $\frac{d\theta}{dt}$ soient θ_0 et ω, l'équation précé-

dente deviendra

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{2gMl}{\sum r^2 dm}(\cos\theta - \cos\theta_0) + \omega^2,$$

ce qui n'est autre chose que l'intégrale première de l'équation (3). Le calcul s'achèverait comme dans la théorie du pendule.

Si l'axe fixe était incliné à l'horizon, une simple décomposition de la pesanteur ramènerait au cas que nous venons de considérer, où l'axe est perpendiculaire à la direction des forces.

208. *Cas où la vitesse angulaire initiale est produite par une force instantanée.* — Nous avons déterminé le mouvement du corps en supposant que sa position initiale soit connue, ainsi que sa vitesse angulaire initiale. Mais si, au lieu de cette vitesse, on donne seulement la force instantanée qui l'a produite, il faudra commencer par déterminer quelle vitesse doit prendre le corps, soumis pendant un temps extrêmement petit à l'action d'une force qui aurait produit sur un point matériel libre une quantité de mouvement connue. La question rentrera alors dans la précédente.

Si l'on décompose cette force en deux autres, dont l'une soit parallèle à l'axe, et l'autre dans un plan perpendiculaire, cette dernière produira seule le mouvement. Représentons sa valeur par P, et par p sa distance à l'axe, le principe de d'Alembert conduira à l'équation

$$\omega \sum r^2 dm = Pp, \quad \text{ou} \quad Mk^2\omega = Pp,$$

ce qui donne pour valeur de la vitesse angulaire cherchée

$$\omega = \frac{Pp}{Mk^2}.$$

299. Supposons maintenant que le mouvement ait été produit par le choc d'un point ayant une masse μ, animée d'une vitesse v dirigée dans un plan perpendiculaire à l'axe, suivant une droite distante de l'axe d'une quantité f; et admettons que cette masse reste unie au corps au point où elle le rencontre, et dont nous désignerons par h la distance à l'axe.

Si l'on décompose la vitesse v suivant la normale et la tangente au cercle que décrira autour de l'axe le point où a lieu le choc, la première sera détruite, et l'autre aura pour valeur $\frac{vf}{h}$. Représentons par ω la vitesse angulaire du système après le choc; la masse μ aura perdu la vitesse $\frac{vf}{h} - h\omega$, et la quantité de mouvement que la réaction du corps lui aura fait perdre sera $\mu\left(\frac{vf}{h} - h\omega\right)$: telle sera donc la mesure de la force instantanée produite sur la masse μ; et, comme l'action et la réaction sont égales, ce sera aussi la mesure de la force instantanée qui a agi sur le corps donné. On rentre donc dans le cas précédent et l'on aura de même

$$\mu h\left(\frac{vf}{h} - h\omega\right) = \omega \sum r^2 dm; \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{\mu v f}{\mu h^2 + \sum r^2 dm}.$$

Le dénominateur est le moment d'inertie du système composé du corps donné et de la masse qui s'est unie à lui. Si donc on entend que la somme $\sum$ s'étend à leur ensemble, on écrira simplement

$$\omega = \frac{\mu f v}{\sum r^2 dm}.$$

Si, au lieu d'un seul corps, on en supposait un nombre quelconque dont les masses fussent $\mu, \mu', \mu'', \ldots$, les vi-

tesses v, v', v'', . . ., et les distances des directions de ces vitesses à l'axe f, f', f'', . . ., et que tous ces corps vinssent choquer le premier au même instant, en se réunissant à lui, on aurait

$$\omega = \frac{\mu v f + \mu' v' f' + \ldots}{\sum r^2 dm},$$

la somme $\sum r^2 dm$ se rapportant à tous ces corps réunis.

CHAPITRE XXIII.

DES MOMENTS D'INERTIE.

300. Le mouvement d'un corps autour d'un axe exige, comme nous l'avons vu, le calcul d'une somme prise dans toute l'étendue de ce corps, et que l'on peut considérer comme une intégrale, en admettant la continuité dans la matière, comme nous l'avons déjà fait dans la théorie des centres de gravité.

Ces intégrales, que nous avons nommées *moments d'inertie*, offrent quelques propriétés importantes qu'il est nécessaire de faire connaître avant d'aller plus loin dans l'étude du mouvement d'un corps solide. Comme elles ne présentent aucune difficulté, et ne donnent lieu à aucune considération un peu délicate, nous nous contenterons d'énoncer les résultats intéressants, sans en rapporter les démonstrations, qui se trouvent dans tous les Traités spéciaux.

301. Les moments d'inertie d'un corps par rapport à différents axes parallèles ont entre eux une relation simple qui permet de les déterminer les uns par les autres. Si l'on considère une droite passant par le centre de gravité du corps, et qu'on cherche le moment d'inertie par rapport à cet axe, celui qui se rapporterait à tout autre axe parallèle, surpasse le premier d'une quantité qui ne dépend que de sa distance au premier, c'est-à-dire au centre de gravité. Cette quantité est le produit de la masse par le carré de cette distance. D'où il résulte que :

La différence des moments d'inertie, par rapport à deux axes parallèles, est égale à la différence des carrés

de leurs distances au centre de gravité, multipliée par la masse du corps.

On peut donc bien facilement passer d'un axe à tout autre axe parallèle.

On voit encore que *les moments d'inertie sont les mêmes pour toutes les génératrices d'un cylindre à base circulaire dont l'axe passe par le centre de gravité*; et que, de toutes les droites parallèles à une même direction, celle qui donne le moment minimum est *celle qui passe par le centre de gravité.*

302. Considérons maintenant la loi qui lie les moments d'inertie d'un corps par rapport à tous les axes qui passent par un même point.

Si l'on suppose trois axes rectangulaires ayant ce point pour origine, et une droite menée par cette origine et faisant avec les axes les angles quelconques α, ϵ, γ, on trouve, par un calcul très-simple, que le moment μ par rapport à cette droite a une expression de la forme suivante :

$$(1)\left\{\begin{aligned} \mu = {} & A\cos^2\alpha + B\cos^2\epsilon + C\cos^2\gamma \\ & - 2D\cos\epsilon\cos\gamma - 2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\alpha\cos\epsilon, \end{aligned}\right.$$

A, B, C, D, E, F étant des constantes déterminées par la nature du système donné, et sa position par rapport aux axes de coordonnées.

Il est même facile de reconnaître ce que représentent les trois coefficients A, B, C.

En effet, si l'on suppose $\cos\epsilon = 0$, $\cos\gamma = 0$, on trouve $\mu = A$; la constante A n'est donc autre chose que le moment d'inertie du système par rapport à l'axe des x; et de même B et C sont les moments par rapport aux axes respectifs des y et des z.

Quant aux trois autres coefficients, ils représentent les intégrales suivantes, étendues à la masse entière du sys-

tème

$$D = \sum yzdm, \quad E = \sum xzdm, \quad F = \sum xydm.$$

303. La loi exprimée par la formule (1) peut être représentée d'une manière remarquable par une figure géométrique.

Si, en effet, on porte sur chaque axe, à partir de l'origine, une longueur égale à l'unité divisée par la racine carrée du moment d'inertie qui lui correspond, l'extrémité de ce rayon, nécessairement fini, puisque μ ne peut être nul, appartiendra à une surface fermée, dont on aura l'équation en remplaçant dans l'équation (1) les quantités $\cos\alpha$, $\cos 6$, $\cos\gamma$ par $x\sqrt{\mu}$, $y\sqrt{\mu}$, $z\sqrt{\mu}$, et l'on trouvera pour l'équation du lieu des extrémités des rayons

(2) $Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Exz - 2Fxy = 1.$

Cette surface du second degré, à centre, qui n'a aucun point à l'infini est nécessairement un ellipsoïde, qui a son centre à l'origine des coordonnées. On lui donne le nom d'*ellipsoïde central*.

Cette représentation géométrique est très-commode, parce que l'ellipsoïde étant étudié avec beaucoup de soin dans les éléments, ses propriétés peuvent en faire connaître immédiatement pour les moments d'inertie, et nous allons en indiquer quelques-unes qui ont une grande importance.

304. *Axes principaux d'inertie.* — La forme et la position de l'ellipsoïde central ne dépendent en rien de la direction des axes, mais seulement du point choisi et du système donné. Or, si l'on choisit précisément le système des axes principaux de l'ellipsoïde, les coefficients de l'équation (2) prendront des valeurs dépendantes de ces axes particuliers, et telles que les rectangles des variables ne s'y trouveront plus, et par conséquent on aura

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0,$$

ou

$$\sum yzdm = 0, \quad \sum xzdm = 0, \quad \sum xydm = 0;$$

il existe donc toujours un système d'axes de coordonnées tel, que les trois intégrales $\sum yz\,dm$, $\sum xz\,dm$, $\sum xy\,dm$, calculées par rapport à lui, se réduisent à zéro.

Réciproquement, si elles sont nulles toutes les trois, l'ellipsoïde sera rapporté à ses axes principaux.

Si l'ellipsoïde central a ses trois axes inégaux, il n'y a qu'un seul système d'axes principaux. Si deux de ses axes sont égaux, il y aura une infinité de systèmes d'axes principaux, dont l'axe de révolution fera toujours partie. Enfin, si ses trois axes sont égaux, l'ellipsoïde se réduit à une sphère; et tout système d'axes rectangulaires passant par le point donné sera un système d'axes principaux de l'ellipsoïde.

Remarque. — Si deux des trois sommes seulement étaient nulles, par exemple $\sum yz\,dm$ et $\sum xz\,dm$, l'équation (2) deviendrait

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Fxy = 1,$$

et l'axe des z serait seul un des axes principaux de l'ellipsoïde.

305. Les axes principaux de cet ellipsoïde sont appelés *axes principaux d'inertie* du système de points matériels. Ils sont définis par la propriété d'annuler les trois intégrales $\sum yz\,dm$, $\sum xz\,dm$, $\sum xy\,dm$; mais ils jouissent de propriétés mécaniques importantes que nous ferons connaître, et auxquelles l'esprit s'attache avec plus d'intérêt qu'à celles qui ne sont qu'un simple résultat de calcul.

En rapportant les points à un système d'axes principaux

d'inertie, les formules (1) et (2) deviennent

(3) $$\mu = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

(4) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

et A, B, C sont les moments d'inertie du système par rapport aux axes principaux. On les nomme *moments d'inertie principaux*.

Si deux d'entre eux sont égaux, l'ellipsoïde central est de révolution; si les trois sont égaux, il se réduit à une sphère

On remarquera que si A est le plus grand des trois moments d'inertie principaux et C le plus petit, pour tous les autres axes, on aura μ plus petit que A et plus grand que C.

CHAPITRE XXIV.

DIVERSES PROPRIÉTÉS DU MOUVEMENT D'UN CORPS AUTOUR D'UN AXE FIXE

306. *Centre d'oscillation.* — On nomme *centre d'oscillation* d'un pendule composé, tout point faisant partie de ce corps, ou lié invariablement à ce corps, dont le mouvement est le même que s'il était isolé et obligé de se mouvoir autour du même axe sous l'action seule de la pesanteur. D'après cela, tous les points de la droite menée parallèlement à l'axe, à une distance égale à la longueur du pendule, c'est-à-dire à $\frac{\sum r^2 dm}{Ml}$, et située dans le plan qui passe par l'axe et le centre de gravité du corps, seront des centres d'oscillation. Quelques auteurs appellent plus particulièrement *centre d'oscillation* celui de ces points qui, dans l'état d'équilibre, est situé sur la verticale qui passe par le centre de gravité.

Si nous désignons par Mk^2 le moment d'inertie du corps par rapport à une parallèle à l'axe, menée par le centre de gravité, le moment $\sum r^2 dm$ par rapport à l'axe de suspension sera égal au moment par rapport à cette parallèle, augmenté du produit de la masse M du corps par le carré de la distance l. Si nous désignons le dernier moment par Mk'^2, la longueur du pendule sera $l+\frac{k^2}{l}$; et les centres d'oscillation seront plus éloignés de l'axe de suspension que le centre de gravité, d'une quantité égale à $\frac{k^2}{l}$.

Les distances du centre de gravité à l'axe et à la ligne des centres d'oscillation, donnant pour produit k^2, il s'ensuit que *si l'on prenait cette dernière pour axe fixe, la première deviendrait la ligne des centres d'oscillation. La longueur du pendule serait donc la même qu'auparavant, et son mouvement serait identique.*

Il en serait encore de même si l'on prenait pour axe de suspension toute autre droite parallèle située à la même distance du centre de gravité, puisque l et k^2 ne changeraient pas.

En général, le mouvement sera le même autour de tous les axes qui donneront la même longueur au pendule. Si l'on désigne par l la distance d'un axe quelconque au centre de gravité, par α, 6, γ les angles que sa direction fait avec les axes principaux relatifs à ce point, et par A, B, C les moments d'inertie par rapport à ces axes, on aura

$$Mk^2 = A\cos^2\alpha + B\cos^2 6 + C\cos^2\gamma,$$

et la longueur $l + \frac{k^2}{l}$ du pendule sera

$$l + \frac{A\cos^2\alpha + B\cos^2 6 + C\cos^2\gamma}{Ml}.$$

Or, cette longueur peut rester la même pour une infinité de droites différentes, puisque α, 6, γ, l sont indéterminés.

307. Si l'on cherche les valeurs que doivent avoir ces indéterminées, pour que l'expression précédente soit minimum, on saura autour de quel axe il faut que le mouvement ait lieu pour que l'oscillation se fasse dans le moindre temps possible.

Or, parmi tous les axes pour lesquels k^2 serait constant, celui qui donne le maximum pour la longueur $l + \frac{k^2}{l}$, correspond à $l = k$; et la longueur du pendule est alors égale

à $2k$. Elle sera donc la plus petite possible lorsque k aura sa plus petite valeur. Ainsi, l'oscillation sera la plus courte lorsque l'axe de suspension sera parallèle à l'axe du plus petit moment d'inertie, relatif au centre de gravité, et que sa distance à ce dernier sera égale à la racine carrée du rapport de ce moment à la masse du corps.

308. *Centre de percussion.* — Lorsque nous nous sommes occupé de l'effet produit par une force instantanée sur un corps solide lié à un axe fixe, nous n'avions pour objet que de déterminer la vitesse angulaire qu'elle communiquerait immédiatement au système. Nous allons maintenant envisager son effet sous un autre point de vue; nous allons chercher quels sont les chocs produits par l'axe fixe, et particulièrement quelles sont les conditions pour qu'il n'en reçoive aucun.

Pour cela, il faut considérer toutes les forces qui doivent être en équilibre, d'après le principe de d'Alembert, et les diviser en deux groupes; le premier, composé de forces appliquées immédiatement à l'axe; le second, de forces détruites par la liaison même des points du corps entre eux, et qui ne peuvent par conséquent affecter l'axe en aucune manière.

A cet effet, on prendra l'axe fixe pour axe des z, et, pour plan des x et y, celui qui serait mené par le point d'application de la force, perpendiculairement à cet axe.

L'équilibre devra avoir lieu entre la force instantanée, dont nous désignerons les composantes par X, Y, Z, et des forces égales et opposées aux quantités de mouvement communiquées instantanément à chaque particule dm, dont les composantes sont $\frac{dx}{dt}dm$, $\frac{dy}{dt}dm$, $\frac{dz}{dt}dm$, mais la dernière est nulle, puisque le z de chaque point est invariable.

En décomposant, suivant l'ordinaire, toutes les forces

en trois forces agissant suivant les axes, et trois couples situés dans les plans coordonnés, on trouvera pour expressions de ces forces

$$X + \omega M y_1, \quad Y - \omega M x_1, \quad Z,$$

x_1, y_1 étant l'x et l'y du centre de gravité, et ω la vitesse angulaire produite : les moments des trois couples ayant leurs axes suivant les axes des x, des y et des z, auront respectivement les valeurs suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} bZ - \omega \sum xz\,dm, \quad -aZ + \omega \sum yz\,dm, \\ aY - bX - \omega \sum r^2 dm, \end{cases}$$

a et b désignant les coordonnées du point d'application de la force.

Les trois forces et les deux premiers couples sont évidemment détruits par l'axe, et font connaître les efforts qui tendent à l'entraîner. Quant au troisième couple, il est nul de lui-même, sans quoi l'équilibre n'aurait pas lieu ; et c'est cette condition qui détermine la valeur de la vitesse angulaire, comme nous l'avons vu précédemment. Ce couple ne produit donc aucun effort sur l'axe.

309. Si l'on veut savoir dans quelles circonstances le mouvement initial du corps se produira, sans qu'aucun effort soit exercé sur l'axe, il faut exprimer que l'équilibre a lieu sans que l'axe produise aucune force, et, par conséquent, par la liaison seule des points du corps ; c'est-à-dire qu'on peut supprimer l'axe et considérer le corps comme entièrement libre. Or on sait que dans ce cas il faut que la force résultante soit nulle, ainsi que le couple résultant. Il faut donc que les trois composantes de la force soient séparément nulles, ainsi que les moments des trois couples composants.

On aura ainsi les six équations suivantes :

$$X + \omega M y_1 = 0,\quad Y - \omega M x_1 = 0,\quad Z = 0,$$

$$bZ - \omega \sum xz dm = 0,$$

$$-aZ + \omega \sum yz dm = 0,$$

$$aY - bX - \omega \sum r^2 dm = 0.$$

Elles sont suffisantes; car, si elles ont lieu et qu'on donne l'impulsion en retenant l'axe, la vitesse initiale sera ω, et l'axe n'éprouvera aucune percussion, il était donc inutile de le tenir.

Si l'on en élimine ω, on aura entre les données les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'axe ne reçoive aucun choc pour acquérir instantanément sa vitesse angulaire. Mais il est bon de simplifier ces calculs, en faisant passer le plan des x et z par le centre de gravité du corps, parce qu'on a alors $y_1 = 0$, et les équations deviennent

$$X = 0,\quad Z = 0,\quad Y = \omega M x_1,$$

$$\sum xz dm = 0,\quad \sum yz dm = 0,\quad aY = \omega \sum r^2 dm.$$

Les deux premières expriment que la force est perpendiculaire au plan ZX; la quatrième et la cinquième expriment que l'axe fixe est un axe principal d'inertie relativement à l'origine.

Les deux autres donnent une nouvelle condition, par l'élimination de ω, et, de plus, la valeur même de ω. Cette condition est

$$a M x_1 = \sum r^2 dm,\quad \text{d'où}\quad a = \frac{\Sigma r^2 dm}{M x_1}.$$

On voit par là que la distance a de la force à l'axe est précisément la longueur du pendule composé que forme-

rait le corps, si on le soumettait à l'action seule de la pesanteur, après avoir donné à l'axe auquel il est lié une position horizontale.

Quant à la vitesse angulaire ω, elle aura pour valeur

$$\omega = \frac{a\mathrm{Y}}{\sum r^2 dm},$$

comme nous l'avions trouvée précédemment, Y et a étant ici ce qui était désigné par P et p.

310. En résumant ce que nous venons de démontrer, on aura les conditions suivantes, nécessaires et suffisantes pour que l'axe ne reçoive aucun choc :

1° Que la force instantanée soit perpendiculaire au plan passant par l'axe et le centre de gravité du corps;

2° Que cet axe soit un des axes principaux du corps par rapport au point où il est rencontré par le plan qui lui est perpendiculaire et qui contient la force;

3° Que la distance de la force à l'axe soit la même que celle du centre d'oscillation du corps autour de ce même axe.

Cette dernière condition montre que la question proposée est impossible quand le centre de gravité est sur l'axe, car, alors, la distance de la force à l'axe aurait une expression infinie.

Le point où la force doit être appliquée dans le plan passant par l'axe et le centre de gravité se nomme *centre de percussion*, il est situé sur la ligne qui contient les centres d'oscillation, et par conséquent est l'un de ces centres; en ne réservant pas cette dénomination, exclusivement à celui qui est sur la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur l'axe.

Réciproquement. — Si le corps était en mouvement autour de l'axe, on pourrait l'arrêter brusquement, au moyen d'une force appliquée au centre de percussion, sans

qu'il en résultât aucun effet sur l'axe, en supposant que les circonstances que nous avons indiquée aient lieu.

311. *Cas où l'axe a un point fixe.* — Nous venons de faire connaître les conditions pour qu'une force instantanée produise une rotation autour d'un axe purement idéal, incapable de résistance. Nous allons maintenant examiner le cas où il existerait un point fixe dans le corps. La force instantanée produira un mouvement initial qui ne peut être qu'une rotation autour d'un axe passant par le point fixe, et que nous ne nous proposons pas ici de déterminer généralement; nous voulons seulement chercher les conditions pour que cet axe soit, comme dans le cas précédent, perpendiculaire au plan contenant la force et le point fixe. La question ainsi posée se résout immédiatement au moyen des calculs qui précèdent.

En effet, prenons ce plan pour celui des x, y, le point fixe pour origine, la perpendiculaire à ce plan pour axe des z, et l'axe des x perpendiculaire à la force, qui se réduira à Y. On aura alors

$$\mathrm{Z} = 0, \quad \mathrm{X} = 0.$$

Les expressions (1) deviendront

$$\mathrm{M}\omega y_1, \quad \mathrm{Y} - \mathrm{M}\omega x_1,$$

et les expressions (2)

$$-\omega \sum xzdm, \quad \omega \sum yzdm, \quad a\mathrm{Y} - \omega \sum r^2 dm,$$

et, comme les forces appliquées à l'origine fixe sont détruites par sa resistance, il est nécessaire et suffisant que les moments des trois couples soient nuls, ce qui donne

$$\sum xzdm = 0, \quad \sum yzdm = 0, \quad \omega = \frac{a\mathrm{Y}}{\sum r^2 dm}.$$

Les deux premières équations expriment que l'axe des z

est un axe principal d'inertie relativement au point fixe; la dernière donne la vitesse angulaire que prend instantanément le corps, son expression est toujours la même que dans les cas précédents. On a ainsi cette importante proposition :

Une force instantanée appliquée à un corps qui a un point fixe, le fera tourner autour de la perpendiculaire au plan mené par le point fixe et la force, lorsque cette perpendiculaire sera un axe principal, relativement au point fixe, ou, en d'autres termes, lorsque le plan mené par le point fixe et la force sera un plan principal.

Il est inutile de faire remarquer que, si dans un même plan passant par le point fixe on avait un nombre quelconque de forces, elles seraient réductibles d'abord à une seule appliquée au point, et à un couple qui se réduirait lui-même à une seule force en le transportant, de manière qu'une de ses forces passe au point fixe, il ne reste plus alors qu'une force, dont le moment par rapport au point fixe est égal à celui du couple; on rentre donc dans le cas de la proposition précédente, et la conclusion sera la même.

312. *Axes permanents de rotation.* — Pendant le mouvement continu qui a lieu autour d'un axe fixe, il s'exerce des efforts contre cet axe, qui se calculeront de la même manière que nous l'avons fait pour les forces instantanées.

Nous considérons le cas où aucune force n'est appliquée au corps, après que l'état initial a été produit. Les forces qui doivent être en équilibre, d'après le principe de d'Alembert, se ramènent à trois forces appliquées à l'origine, et trois couples dans les plans coordonnés. Or, si l'origine seule est fixée et que les moments des trois couples soient nuls, l'équilibre aura lieu sans qu'il y ait aucun effort exercé sur l'axe, et, par conséquent, il n'y aura aucun effort à faire pour le retenir pendant que le mouvement

continuera autour de lui. Or les moments de ces couples sont respectivement

$$-\omega^2 \sum yzdm + \frac{d\omega}{dt} \sum xzdm,$$

$$\omega^2 \sum xzdm + \frac{d\omega}{dt} \sum yzdm,$$

$$-\frac{d\omega}{dt} \sum r^2 dm.$$

Il faudra pour qu'ils soient nuls

$$\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

et, par suite,

$$\sum xzdm = 0, \quad \sum yzdm = 0,$$

c'est-à dire que l'axe des z sera un axe principal relatif à l'origine, et la vitesse angulaire sera constante. De là résulte la proposition suivante :

Lorsqu'un corps a l'un de ses points fixe, et commence par tourner autour d'un de ses axes principaux d'inertie relatifs à ce point, il continuera indéfiniment à tourner autour de cet axe, avec une vitesse angulaire constante, si aucune force ne lui est appliquée.

C'est pour cela que les trois axes principaux du corps, relativement au point fixe, se nomment des *axes permanents de rotation* relativement à ce point.

313. Si le point fixe était le centre de gravité du corps, on aurait

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0,$$

les forces appliquées à ce point sont, dans le cas actuel,

$$\omega^2 M x_1 + M y_1 \frac{d\omega}{dt}, \quad \omega^2 M y_1 - M x_1 \frac{d\omega}{dt}, \quad 0,$$

elles sont donc nulles et l'origine n'éprouve aucune pression; de sorte que le mouvement autour de l'axe n'exige pas qu'on retienne l'axe, qui, par conséquent, peut être laissé entièrement libre D'où se déduit cette importante proposition :

Si un corps entièrement libre commence à tourner autour d'un de ses axes principaux, relatifs à son centre de gravité, et qu'aucune force étrangère ne lui soit appliquée, son mouvement continuera uniformément autour de cet axe.

Ces trois axes particuliers, qui sont les seuls qui jouissent de cette propriété remarquable, indépendante de toute forme du corps, se désignent sous le nom d'*axes naturels de rotation.*

Si le corps était soumis à l'action de forces réductibles à un couple situé dans un plan perpendiculaire à l'axe, le mouvement aurait toujours lieu autour du même axe, mais avec une vitesse angulaire variable. Cela résulte de ce qui précède, puisque les deux forces du couple, transportées à l'origine, s'y détruisent, et qu'il n'y a pas de couples composants dans les plans XZ, YZ.

Observation. — Nous nous sommes un peu étendu sur le mouvement d'un corps solide autour d'un axe, mais l'importance de la question nous a paru exiger ces développements. Non-seulement les propositions que nous avons démontrées sont utiles par elles-mêmes, mais elles le sont encore par l'usage que l'on en fait dans l'étude de questions plus complexes. Le mouvement autour d'un axe est l'élément de tous les autres; et la connaissance des axes principaux d'inertie d'un corps permet, comme nous allons le démontrer tout à l'heure, de ramener l'effet immédiat de forces appliquées à un corps, à celui qui serait produit autour d'axes déterminés.

De plus, nous avons trouvé la l'occasion d'appliquer, à des questions de grande importance, la méthode par laquelle les questions de mouvement sont ramenées à des questions d'équilibre.

Nous donnerons moins de développement aux théories qui suivent, nous nous contenterons d'indiquer la marche générale, et nous renverrons, pour les détails, aux Traités spéciaux.

CHAPITRE XXV.

DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE DONT UN POINT EST FIXE.

Si l'état initial du corps est donné, il n'y a plus à s'occuper que du mouvement continu qui suivra.

Si l'on donne seulement les forces instantanées qui, appliquées au corps en repos et dans une position connue, produisent cet état initial, la première question à résoudre est la détermination de cet état, et c'est elle qui va nous occuper d'abord.

314. *Mouvement initial produit par des forces instantanées.* — Quel que soit le nombre de ces forces, elles sont toujours réductibles à une seule force appliquée au point fixe et un couple unique. La force est détruite par la résistance du point; la question se réduit donc toujours à trouver l'effet d'un couple instantané.

Pour cela, nous supposerons qu'on ait pris pour axes de coordonnées les trois axes principaux d'inertie du corps, relatifs au point fixe, et nous désignerons comme précédemment par A, B, C les moments d'inertie par rapport à ces axes; l'équation de l'ellipsoïde central sera

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Si maintenant on décompose le couple donné en trois autres ayant pour axes ceux des x, y et z, et, pour moments respectifs, L, M, N, on sait, par un théorème général démontré précédemment, que les vitesses que prendront tous

les points du corps par l'effet du couple donné, peuvent être obtenues en composant celles qu'ils obtiendraient par l'action séparée des trois couples composants, agissant chacun sur le corps en repos dans sa position donnée. Or le couple de moment L étant situé dans le plan perpendiculaire à l'axe principal des x produira un mouvement autour de cet axe même, avec une vitesse angulaire ω, égale à $\frac{L}{A}$.

Le couple dont l'axe est dirigé dans le sens des y produira un mouvement autour de cet axe avec la vitesse angulaire $\omega' = \frac{M}{B}$.

Enfin le couple dont l'axe est dirigé dans le sens des z produira un mouvement autour de cet axe avec la vitesse angulaire $\omega'' = \frac{N}{C}$.

Pour avoir la vitesse résultante en chaque point, il faudra composer ces trois rotations, ce qui se fera par les règles connues de la Géométrie. L'axe de la rotation résultante fera, avec les axes, des angles α, 6, γ, dont les cosinus seront proportionnels à ω, ω', ω'', et la valeur de cette résultante sera

$$\sqrt{\omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2}.$$

La question est donc résolue; mais la direction de cet axe a, relativement à l'ellipsoïde central, une position remarquable, que nous ne pouvons nous dispenser de faire connaître.

Le rayon de l'ellipsoïde qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $\frac{L}{A}, \frac{M}{B}, \frac{N}{C}$, rencontre sa surface en un point dont les coordonnées sont proportionnelles à ces mêmes valeurs, et, par conséquent, l'équation du plan mené par l'origine, parallèlement au plan tan-

gent à l'ellipsoïde en ce point, aura pour équation

$$Lx + My + Nz = 0,$$

ce qui est précisément l'équation du plan du couple donné, dont l'axe fait avec les axes de coordonnées, des angles dont les cosinus sont proportionnels à L, M, N. De là résulte cette remarquable proposition due à Poinsot :

L'axe de la rotation produite par un couple sur un corps solide qui a un point fixe est le diamètre conjugué du plan du couple, dans l'ellipsoïde central relatif au point fixe.

On voit comment la considération des axes principaux d'inertie a ramené immédiatement à des mouvements autour d'axes fixes, le mouvement beaucoup moins simple autour d'un point fixe.

DU MOUVEMENT CONTINU AUTOUR D'UN POINT FIXE.

315. L'état initial étant connu, il s'agit de déterminer le mouvement que prendront tous les points du corps, par l'action des forces continues qui y sont appliquées. Mais il ne sera pas nécessaire de calculer en fonction du temps les coordonnées de chacun de ces points, il suffirait, par exemple, d'en choisir particulièrement trois non en ligne droite, et de prendre leurs coordonnées pour inconnues, celles de tous les autres points s'ensuivraient nécessairement. On pourrait de bien d'autres manières réduire la recherche à un nombre fini d'inconnues : parmi tous les systèmes que l'on peut choisir, le plus commode est celui qui consiste à prendre trois droites rectangulaires liées invariablement au corps, et passant par le point fixe. Si l'on peut déterminer à chaque instant leurs positions par rapport à trois axes fixes ayant pour origine le point fixe, ils détermineront la position du corps à chaque instant, et,

par suite, celle de tous ses points, qui y seront rapportés naturellement comme à un système d'axes coordonnés.

Chacun de ces axes mobiles avec le corps, et que nous désignerons par X_1, Y_1, Z_1, sera déterminé par les angles que sa direction fera avec celles des axes fixes; il y aura ainsi neuf quantités inconnues, mais entre lesquelles il existera, comme on sait, six équations de condition, ce qui réduit le nombre des inconnues à trois. On peut encore, au lieu de ce système d'angles et d'équations de condition, considérer trois angles, φ, ψ, θ, indépendants les uns des autres, qui seront les inconnues définitives dont on cherchera à exprimer les valeurs en fonction du temps. L'un d'eux sera l'angle que fait l'axe Z_1 avec l'axe Z; le second, l'angle que fait avec X la trace du plan X_1Y_1 sur XY; le troisième, l'angle de l'axe X_1 avec cette même trace. On a donné, dans les éléments de Géométrie et de Calcul, les équations qui permettent de passer d'un système à l'autre; nous ne nous occuperons point ici de ces détails.

Les inconnues étant ainsi choisies, il s'agit de trouver les équations par lesquelles on pourra les déterminer. La méthode sera toujours la même, on exprimera qu'il y a équilibre au moyen des liaisons, entre les forces données et les forces d'inertie de tous les points matériels: ce qui fournira, comme on l'a vu dans la théorie de l'équilibre, trois équations exprimant l'équilibre des couples provenant de la décomposition de chaque force en une force appliquée au point fixe et un couple. On aura ainsi autant d'équations que d'inconnues, et *le problème de mouvement sera ramené à un problème de calcul.*

316. Il y a maintenant une observation importante à faire sur le choix des axes suivant lesquels on fera la décomposition des forces. Quels qu'ils soient, l'équilibre est

assuré en égalant à zéro chacun des couples composants ayant leurs axes suivant ces trois droites. On pourra prendre certaines droites à une époque du mouvement et d'autres à une autre époque; les équations ainsi obtenues exprimeront toujours l'équilibre qui doit avoir lieu, et par conséquent suffiront, avec plus ou moins d'avantage, à la détermination du mouvement.

Or les trois directions qu'il est le plus avantageux de prendre sont celles des axes fixés au corps, et pour lesquelles on choisit les axes principaux d'inertie relativement au point fixe. Seulement, il y aura quelques attentions à avoir pour l'expression des composantes de la force d'inertie, qui est fort différente de ce qu'elle serait relativement à des axes fixes. Ainsi ces composantes, estimées par rapport aux axes fixes X, Y, Z, seront, au signe près, $\frac{d^2x}{dt^2}dm$, $\frac{d^2y}{dt^2}dm$, $\frac{d^2z}{dt^2}dm$, ou les dérivées des composantes de la vitesse, suivant ces mêmes axes.

On voit bien qu'il n'en peut être de même pour les coordonnées x_1, y_1, z_1, qui sont constantes pour une même molécule; mais on pourrait croire, au premier abord, que les dérivées des composantes u, v, w de la vitesse du point parallèlement aux axes X_1, Y_1, Z_1, ou $\frac{du}{dt}dm$, $\frac{dv}{dt}dm$, $\frac{dw}{dt}dm$, sont bien les composantes de la force motrice qui agit sur dm; ce qui serait une très-grave erreur, comme on va le voir.

En effet, u, v, w sont des fonctions du temps qui expriment à chaque instant les composantes de la vitesse réelle du point, estimées suivant les directions qu'ont les axes X_1, Y_1, Z_1 au moment où l'on fait cette décomposition, et $u+du$, $v+dv$, $w+dw$ sont les composantes de la vi-

tesse après le temps dt, estimée suivant les nouvelles directions des mêmes axes après ce temps dt; de sorte que du, dv, dw ne sont pas les accroissements des composantes de la vitesse réelle du point, estimées suivant les trois mêmes axes; ce qu'il faudrait cependant pour que, en les divisant par dt, on eût les composantes de la force accélératrice.

Cette remarque bien simple étant faite, on voit comment on peut obtenir ces accroissements des composantes de la vitesse suivant les axes X_1, Y_1, Z_1 restant dans la position qu'ils occupent au commencement de l'intervalle dt. Il suffira, en effet, de chercher les composantes, suivant ces mêmes axes, de la vitesse à la fin de cet intervalle, et d'en retrancher respectivement u, v, w; on aura alors les composantes de la force accélératrice suivant les axes X_1, Y_1, Z_1 dans leur première position, en divisant les restes par dt. Quant aux composantes suivant X_1, Y_1, Z_1 de la vitesse après le temps dt, elles s'obtiendront en projetant successivement sur ces trois axes les trois composantes $u + du$, $v + dv$, $w + dw$ de la vitesse après le temps dt, suivant les dernières directions des axes mobiles.

Connaissant ainsi les composantes des forces d'inertie parallèlement aux axes principaux du corps, et décomposant, suivant les mêmes directions, les forces extérieures données, on formera facilement les trois équations de l'équilibre de l'ensemble de ces forces, qui seront les équations du mouvement du corps.

Nous n'entrerons pas dans les détails de ce calcul, et nous nous bornerons à en donner le résultat. En représentant d'abord par u', v', w' les composantes de la force accélératrice parallèlement aux directions des axes mobiles, et par X_1, Y_1, Z_1 les composantes parallèles aux axes mobiles de la force motrice appliquée à un point quelconque,

le principe de d'Alembert fournira les trois équations suivantes :

$$\sum (y_1 w' - z_1 v')\,dm = \sum (y_1 Z_1 - z_1 Y_1),$$

$$\sum (z_1 u' - x_1 w')\,dm = \sum (z_1 X_1 - x_1 Z_1),$$

$$\sum (x_1 v' - y_1 u')\,dm = \sum (x_1 Y_1 - y_1 X_1).$$

Les sommes indiquées dans les premiers membres se rapportent à la masse entière, et celles du second aux forces extérieures qui peuvent être appliquées, soit à tous les points du corps, soit à certains points particuliers en nombre fini. Ces dernières peuvent être exprimées à chaque instant d'après les éléments qui déterminent la position du corps; ce sont donc des fonctions connues des angles φ, ψ, θ, et peut-être de t, dans le cas où les forces dépendraient du temps.

Quant aux premiers membres, ils auront une expression extrêmement simple si l'on choisit les axes principaux d'inertie du corps pour les axes X_1, Y_1, Z_1. Alors les sommes $\sum y_1 z_1\, dm$, $\sum z_1 x_1\, dm$, $\sum x_1 y_1\, dm$ sont nulles; et si l'on désigne par A, B, C les moments d'inertie du corps par rapport aux axes respectifs des x_1, y_1, z_1, et par L, M, N les fonctions connues, qui sont les expressions des seconds membres, on aura les trois équations suivantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (B - C)\,qr + L, \\ B\dfrac{dq}{dt} = (C - A)\,rp + M, \\ C\dfrac{dr}{dt} = (A - B)\,pq + N. \end{cases}$$

Ces trois équations doivent être jointes à celles qui déterminent p, q, r en fonction des angles a, b, c, a',.... Ces dernières peuvent s'exprimer au moyen de trois angles φ, ψ, θ (*Cours de Mécanique*). En faisant cette transformation, on trouve

$$(2)\qquad \begin{cases} p = \cos\varphi \dfrac{d\theta}{dt} + \sin\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt}, \\ q = -\sin\varphi \dfrac{d\theta}{dt} + \cos\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt}, \\ r = \cos\theta \dfrac{d\psi}{dt} + \dfrac{d\varphi}{dt}. \end{cases}$$

On a ainsi un système de six équations différentielles du premier ordre, qui déterminera les six fonctions p, q, r, φ, ψ, θ en fonction de t. Les six constantes arbitraires se détermineront par les positions et les vitesses initiales.

317. Ces équations ne peuvent être intégrées que dans des cas particuliers.

S'il n'existe aucune force extérieure, les équations (1) se réduisent à

$$(3)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (B - C)qr, \\ B\dfrac{dq}{dt} = (C - A)rp, \\ C\dfrac{dr}{dt} = (A - B)pq. \end{cases}$$

On tire facilement de ces équations les deux suivantes :

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = 0,$$

$$A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\frac{dq}{dt} + C^2r\frac{dr}{dt} = 0,$$

d'où

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2,$$

h et k étant des constantes qui seront déterminées par l'état initial. Tirant de ces équations les valeurs de p et q, et les reportant dans la troisième, on aura

$$(4)\quad dt = \frac{C\sqrt{AB}\,dr}{\sqrt{k^2 - Bh + C(B-C)r^2}\sqrt{Ah - k^2 + C(C-A)r^2}}.$$

Cette expression ne peut être intégrée sous forme finie que si deux des trois moments d'inertie A, B, C sont égaux, ou si k^2 est égal à l'une des trois quantités Ah, Bh, Ch. Effectuant alors l'intégration, on aura t en fonction de r, d'où r en fonction de t, et, par suite aussi, p et q. Il ne restera plus alors qu'à déduire des équations (2) les valeurs de φ, ψ, θ.

Mais il sera plus avantageux de faire usage du principe des aires, et de prendre pour plan des x et y le plan *invariable* du maximum, ou, en d'autres termes, celui du couple résultant des quantités de mouvement, lequel est constant en direction et en grandeur, puisque les forces extérieures sont nulles.

De là résulteront les équations suivantes (*Cours de Mécanique*) :

$$(5)\quad \frac{Ap}{k} = \sin\theta\sin\varphi,\quad \frac{Bq}{k} = \sin\theta\cos\varphi,\quad \frac{Cr}{k} = \cos\theta,$$

k désignant la valeur constante connue du moment du couple résultant $\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}$.

Ces trois dernières équations se réduisent à deux, parce que la somme de leurs carrés est une identité. On ne pourra donc en tirer que les valeurs de deux des angles. On obtien-

dra ainsi

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{Ap}{Bq}, \quad \cos\theta = \frac{Cr}{k},$$

et l'on n'aura recours aux équations (2) que pour la détermination de ψ.

Pour cela, on éliminera $\frac{d\theta}{dt}$ des deux premières, et l'on aura

$$p \sin\varphi + q \cos\varphi = \sin\theta \frac{d\psi}{dt},$$

ou, d'après les équations (5),

$$\frac{Ap^2 + Bq^2}{k \sin\theta} = \sin\theta \frac{d\psi}{dt},$$

ou

$$Ap^2 + Bq^2 = k\left(1 - \frac{C^2r^2}{k^2}\right)\frac{d\psi}{dt};$$

remplaçant $Ap^2 + Bq^2$ par son égal $h - Cr^2$, on aura

$$d\psi = \frac{k(h - Cr^2)}{k^2 - C^2r^2}\, dt.$$

Si l'on remet maintenant pour dt son expression (4), on aura à effectuer une quadrature qui sera possible sous forme finie dans les mêmes cas que celle de dt.

Nous renvoyons, pour les détails, au *Cours de Mécanique*, où l'on trouvera la démonstration de quelques-uns des beaux théorèmes que Poinsot a fait connaître.

DU DOUBLE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE LIBRE

318. Lorsqu'un système rigide est passé d'une position à une autre, on aurait pu l'y faire arriver en lui donnant un mouvement de *translation* par lequel tous les points décriraient des droites égales et parallèles à celle qui joindrait la première et la seconde position d'un de ses points, choisi à

volonté, puis en donnant au système un mouvement convenable autour de ce point fixe.

Le point choisi pour opérer la translation est arbitraire, et il y a par conséquent une infinité de manières de faire passer un corps d'une position à une autre par une translation et une rotation : ce n'est là qu'une question de Géométrie, dans laquelle la considération des forces n'entre pas. Mais lorsque le mouvement est continu et produit par des forces données, il n'y a plus rien d'arbitraire, et il s'agit de déterminer toutes les positions successives dans lesquelles se trouve, effectivement, le corps à chaque instant.

La méthode qui conduira aux équations du mouvement consistera toujours à exprimer l'équilibre entre les forces extérieures appliquées au corps, et les forces d'inertie développées par tous ses points : ces équations seront au nombre de six, puisque le corps est entièrement libre. Quant au mode de détermination du corps, on considérera, comme dans le problème précédent, trois axes qui lui soient invariablement liés, et l'on verra bientôt l'avantage qu'il y aura à choisir le centre de gravité pour leur point de rencontre. On prendra alors pour inconnues les coordonnées du centre de gravité, et les angles que les directions de ces axes font avec celles d'axes fixes; ou simplement trois angles analogues à ceux que nous avons employés dans la question précédente. On aura ainsi six équations et six inconnues, et le problème sera déterminé.

On voit que la question est beaucoup plus compliquée que la précédente, dans laquelle le point de rencontre des axes mobiles était fixe. Aussi nous bornerons-nous à faire connaître une décomposition remarquable de ce mouvement, dont la démonstration n'exige aucun calcul.

Nous nous occuperons d'abord de la détermination de l'état initial, résultant de forces instantanées appliquées

au corps à l'état de repos. Nous considérerons ensuite les états résultant de l'état initial et de l'action des forces continues.

319. *Mouvement initial produit par des forces instantanées.* — Toutes ces forces peuvent être réduites à une résultante appliquée au centre de gravité et à un couple, et nous avons démontré qu'on peut calculer séparément l'effet produit par l'une et l'autre sur le corps partant du repos, puis composer les vitesses acquises dans ces deux cas. Examinons successivement ces deux effets.

Nous savons d'abord que le centre de gravité prendra le même mouvement que si toute la masse y était réunie et que toutes les forces y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes, ce qui donnerait ainsi la résultante même, puisque les deux forces du couple s'y détruiraient. Cette force étant connue ainsi que la masse totale, la vitesse initiale du centre de gravité le sera par suite.

Reste à connaître les vitesses initiales produites sur tous les autres points par l'action de cette même force.

320. *Effet d'une force appliquée au centre de gravité d'un corps.* — Si l'on décompose le corps en éléments infiniment petits en tous sens, la force donnée pourra être décomposée en forces parallèles, appliquées à ces éléments proportionnellement à leurs masses. Si tous ces éléments étaient libres, ils se mouvraient parallèlement à la force donnée, avec une vitesse égale au rapport de la force qui leur est appliquée, à leur masse, et par conséquent au rapport de la force totale à la masse totale; ce qui n'est autre chose que la vitesse du centre de gravité. D'où l'on conclut qu'*une force quelconque, appliquée au centre de gravité d'un corps solide, fait acquérir à tous ses points une vitesse égale, parallèle à la force, et la même que si toute la masse était réunie au centre*

Si la force est de celles qu'on appelle *instantanées*, la vitesse acquise pendant le temps extrêmement petit de son action, sera une vitesse finie. Si au contraire c'est une force finie, la vitesse acquise dans un temps infiniment petit sera infiniment petite, et la proposition précédente subsistera toujours. Dans le cas où cette force finie agirait pendant un temps fini, dans une direction constante, les vitesses acquises s'ajouteraient et produiraient une vitesse finie, déterminée toujours par le même théorème.

321. Maintenant que nous connaissons l'effet d'une force quelconque appliquée au centre de gravité d'un corps libre, et dans le cas actuel cette force étant la résultante de toutes les forces instantanées qui doivent produire l'état initial, nous pouvons énoncer cette proposition :

L'effet produit par la résultante des forces instantanées transportées au centre de gravité, est de faire acquérir à tous les points des vitesses parallèles à cette force et égales à celle qui aurait lieu si toute la masse était réunie, et toutes les forces transportées, au centre de gravité.

322. *Effet du couple instantané.* — Passons à l'effet du couple instantané, appliqué au corps en repos.

Le centre de gravité ne sera pas déplacé, puisque les deux forces du couple transportées en ce point se détruiraient; d'où l'on conclut que rien ne serait changé dans l'effet produit, si l'on fixait invariablement ce point.

Mais alors on pourrait introduire en ce point la résultante générale, puisqu'elle serait détruite par la résistance du point fixe : on peut donc dire que *l'effet du couple est le même que serait celui de toutes les forces données, si l'on fixait le centre de gravité.* D'où résulte enfin cette proposition générale qui donne la détermination de l'état initial :

Les vitesses que prennent instantanément les différents points d'un corps solide libre, peuvent être considérées comme les résultantes de celles qui se rapporteraient à deux mouvements distincts : l'un de translation, produit par les forces d'impulsion transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité ; l'autre de rotation, produit par le système même des forces données, agissant sur le corps dont le centre de gravité aurait été invariablement fixé.

Au moyen de cette proposition, le mouvement initial du corps est entièrement connu, puisque l'on sait déterminer celui d'un corps autour d'un point fixe. Quant à ce qu'il deviendra par la suite, nous savons que le centre de gravité se mouvra de la même manière que si toute la masse y était réunie, et que toutes les forces continues y fussent transportées, sans changer de grandeur et de direction. Mais ces forces, dépendant, en général, de la position des points, se trouvent, par cela même, dépendantes du mouvement de rotation ; de sorte que l'on ne peut calculer séparément le mouvement du centre de gravité du corps, excepté dans le cas particulier où les forces auraient des directions et des intensités constantes, comme par exemple dans le cas de la pesanteur.

Au reste, on peut toujours établir la même proposition relativement aux forces continues, que relativement aux forces instantanées. En effet, considérons le corps à un instant quelconque : on peut supposer qu'il part du repos et qu'il est sollicité, d'un côté, par des forces instantanées qui donneraient à chaque point la vitesse qu'il a, d'un autre côté, par les forces continues qui ne peuvent produire que des vitesses infiniment petites dans un intervalle de temps infiniment petit, et que l'on peut regarder comme des forces instantanées agissant au commencement de cet intervalle de temps infiniment petit. Or, d'après le principe

que nous avons rappelé, on peut déterminer séparément les vitesses produites par ces deux systèmes, et les composer ensuite. Le premier produira l'effet qui avait réellement lieu à l'instant considéré ; le second est identique avec celui que nous avons discuté d'abord, et, par conséquent, il produira une vitesse de translation infiniment petite, due à toutes les forces continues transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité, et un mouvement de rotation autour du centre de gravité rendu fixe, produit par toutes ces forces dans leur véritable position.

Ainsi donc, *si l'on conçoit par le centre de gravité du corps trois axes rectangulaires qui se meuvent parallèlement à eux-mêmes, leur point de rencontre se mouvra comme si toute la masse du corps y était réunie, et que toutes les forces, instantanées ou continues, y fussent appliquées, et le mouvement du corps, par rapport à ces axes, sera le même que si leur point de rencontre était invariablement fixé, et que toutes les forces qui sollicitent à chaque instant les différents points dans le mouvement réel fussent appliquées de la même manière à ces mêmes points.*

323. *Application à l'ellipsoïde pesant.* — Supposons qu'un ellipsoïde homogène reçoive une impulsion dont la direction soit comprise dans le plan de deux de ses axes principaux relatifs à son centre de gravité, et soit ensuite abandonné à l'action de la pesanteur. Désignons par μv la quantité de mouvement qui mesure la force instantanée, par f la distance de cette force au centre, par b et c les deux demi-axes qui sont dans le plan de la force, et par a le troisième ; enfin par M la masse de l'ellipsoïde, et par V la vitesse initiale de son centre de gravité.

Le centre de gravité, qui est le centre de l'ellipsoïde, devant se mouvoir comme si la masse M y était concentrée,

et fût sollicitée au premier instant par la force $\mu\nu$, puis par son poids, ce point prendra d'abord, dans une direction parallèle à celle de l'impulsion, une vitesse dont la valeur sera

$$V = \frac{\mu\nu}{M},$$

et il décrira une parabole tangente à cette direction initiale, et dont l'équation se calculera comme dans le cas d'un point libre. Pour connaître son mouvement par rapport à trois axes passant par son centre et parallèles à des directions fixes, il faut supposer que le centre soit fixe et que la force d'impulsion ainsi que la pesanteur agissent sur l'ellipsoïde ainsi assujetti. Mais on peut faire abstraction de la pesanteur, puisque le centre de gravité est fixe, et il suffit de déterminer la rotation produite par l'impulsion. Cette force étant située dans un plan perpendiculaire à une droite, qui est un axe principal relativement au point où elle est coupée par ce plan, et de plus ce point étant fixe, il s'ensuit que le mouvement aura lieu indéfiniment autour de cet axe. La vitesse angulaire ω s'obtiendra en divisant le moment $\mu\nu f$ de la force par le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe fixe; on aura donc

$$\omega = \frac{5\mu\nu f}{M(b^2 + c^2)},$$

ou, en introduisant la vitesse V, initiale du centre de gravité,

$$\omega = \frac{5Vf}{b^2 + c^2}.$$

On voit donc que l'axe de rotation se transporte parallèlement à lui-même, et que le corps tourne uniformément autour de cette droite, que l'on pourra déterminer à chaque instant, puisqu'on connaît le mouvement du centre de gravité qui en est le milieu. On déterminera donc facilement

la position de tous les points de l'ellipsoïde, à un instant quelconque.

Dans le cas où il serait réduit à une sphère pleine ou creuse, homogène ou seulement formée de couches homogènes, tout diamètre serait un axe principal; le mouvement de rotation aurait lieu autour de celui qui serait perpendiculaire au plan mené par le centre et par la direction de la force d'impulsion, et la direction de cet axe serait constamment parallèle à elle-même.

Le mouvement de rotation de cette sphère ne serait pas altéré si tous les points étaient attirés vers d'autres points par des forces proportionnelles aux masses et à une fonction de la distance, parce que la résultante des actions exercées par un point quelconque sur la masse entière de la sphère, passerait par son centre de gravité. Mais si le corps était tant soit peu différent d'une sphère, il n'en serait plus ainsi; et c'est ce qui arrive par exemple dans le cas de la terre.

CHAPITRE XXVI.

DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE POINTS LIBRES SOUMIS A LEUR ACTION MUTUELLE

324. Cette question est une des plus importantes de la *mécanique celeste*, et constitue la première et la plus grande partie du problème du système du monde.

En effet, nous avons reconnu que toutes les molécules de la matière s'attirent mutuellement dans le rapport des masses, et en raison inverse du carré de la distance. Dans cette loi d'attraction des sphères composées de couches concentriques homogènes, s'attirent comme si leurs masses étaient réunies en leurs centres respectifs, et, de plus, d'après un principe général, leurs centres de gravité doivent se mouvoir de la même manière que si cette concentration de la matière avait lieu.

Or les planètes et leurs satellites ont une forme sensiblement sphérique, et leur formation vraisemblable donne lieu de croire qu'elles sont composées de couches concentriques homogènes. On peut donc dans la recherche du mouvement de leurs centres de gravité, qui sont leurs centres de figure, les considérer comme réduites à de simples points, ayant la masse de ces corps eux-mêmes, et s'attirant mutuellement, proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leurs distances.

Si l'on pouvait résoudre ce premier problème, il resterait encore à connaître, pour chacun de ces corps, son mouvement de rotation autour de son centre de gravité. Or on connaîtrait à chaque instant la position de tous ces

centres, que l'on peut regarder comme les points d'application des forces qui agissent sur tous les points d'un quelconque de ces corps; le mouvement de rotation de chacun d'eux rentrerait donc dans la question examinée précédemment.

Rien n'est plus facile que de former les trois équations du mouvement de chacun des points libres qui s'attirent ou se repoussent mutuellement, proportionnellement à leurs masses et à une fonction donnée $\varphi(r)$ de leur distance r. En effet, si l'on désigne par (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z''), ..., les coordonnées de ces différents points, par m, m', m'', ... leurs masses, les composantes de la force totale qui s'exerce sur le premier sera, en désignant par r', r'', ... ses distances aux autres et supposant toutes les actions attractives,

$$mm'\frac{x'-x}{r'}\varphi(r') + mm''\frac{x''-x}{r''}\varphi(r'') + \ldots,$$

$$mm'\frac{y'-y}{r'}\varphi(r') + mm''\frac{y''-y}{r''}\varphi(r'') + \ldots,$$

$$mm'\frac{z'-z}{r'}\varphi(r') + mm''\frac{z''-z}{r''}\varphi(r'') + \ldots$$

Si l'une des actions était répulsive, il faudrait changer de signes les termes qui renferment la distance correspondante.

Égalant respectivement ces trois expressions à $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$, on aura les trois équations du mouvement du premier point.

En agissant de même pour tous les autres, on aura autant d'équations que de coordonnées, et comme les variables r', r'', ... s'expriment au moyen des coordonnées, il ne reste qu'une seule variable indépendante, qui est le temps,

et le problème du mouvement de tous les points est ramené au problème de l'intégration d'un système d'équations différentielles.

323. Mais ces équations n'étant pas linéaires, ne peuvent généralement être intégrées, sous forme finie, même en acceptant les quadratures comme des opérations toujours praticables. Les principes généraux en donneront bien quelques intégrales; mais elles sont insuffisantes, même dans le cas où le système ne se compose que de trois points.

Ainsi, le principe du mouvement du centre de gravité apprend que ce point se mouvra uniformément, en ligne droite, puisque toutes les forces étant deux à deux égales et opposées, se détruisent quand on les transporte en un même point; et, comme l'état initial de tous les points fait connaître la direction et la grandeur de la vitesse du centre de gravité, son mouvement est complétement déterminé. Ses coordonnées sont donc des fonctions linéaires connues du temps; or elles peuvent s'exprimer en fonctions linéaires de celles des points donnés; il résultera donc de là trois équations linéaires entre les coordonnées de tous les points et le temps.

Le principe des aires en donne trois autres entre ces coordonnées et leurs premières dérivées.

Enfin le principe des forces vives qui a lieu, puisque les actions mutuelles ne sont fonctions que de la distance, donnera une nouvelle équation entre ces mêmes quantités.

On aura donc ainsi sept équations, dont quatre encore renferment des différentielles du premier ordre.

Mais le nombre des coordonnées est plus grand que sept dès qu'il y a plus de deux points, et l'intégration devient impossible d'une manière générale.

Quand il n'y a que deux points, c'est le problème du

soleil et d'une planète, supposés complétement isolés : nous l'avons traité précédemment.

Quand il y a trois points, la question est celle du soleil, de la terre et de la lune, sans aucune action étrangère : c'est le célèbre *problème des trois corps*, qui a tant occupé les géomètres, et dont on n'a pu trouver la solution exacte.

On peut juger par là de la difficulté du problème qui embrasserait tout le système solaire, dont le nombre des corps est déjà si considérable, et s'accroît encore tous les jours. Heureusement qu'il y a quelques circonstances qui rendent un peu plus facile le calcul des approximations, comme nous allons le faire concevoir sommairement.

En effet, parmi tous ces corps il y en a un d'une masse beaucoup plus grande, non-seulement que chacun des autres, mais même que leur ensemble : c'est le soleil. Les autres sont en général à de très-grandes distances les uns des autres, et leur action, étant proportionnelle à la masse et en raison inverse du carré de la distance, est incomparablement moindre que celle que le soleil exerce sur eux; on peut donc la négliger dans une première approximation : ce qui ramène à la considération de deux corps seulement.

Toutefois, il y a quelques groupes composés de corps beaucoup plus voisins les uns des autres, et dont il semblerait qu'on ne peut négliger ainsi les actions mutuelles; mais il se trouve que l'un d'eux est beaucoup plus grand que tous les autres ensemble, et par conséquent encore on peut commencer par faire abstraction de ces derniers, et calculer le mouvement du plus considérable soumis à l'action seule du soleil : c'est le cas, par exemple, de Jupiter et de ses satellites.

Quant au mouvement de ces derniers, on remarquera d'abord que, vu la presque égalité des distances de tous les points du groupe au centre du soleil, les forces accélera-

trices provenant de ce dernier peuvent être considérées comme égales et parallèles, et, par conséquent, ne changent rien au mouvement relatif de tous ces points soumis à leur action mutuelle. On est donc ainsi ramené à la détermination du mouvement relatif de points en beaucoup moindre nombre, et dont l'un est d'une masse très-considérable par rapport aux autres : problème analogue à celui du soleil et des planètes, et qui donnera lieu aux mêmes simplifications dans une première approximation.

Après ce premier travail, il faut passer à un autre beaucoup plus pénible : il faut tenir compte des forces négligées, qui modifient les résultats et produisent dans les mouvements ce que l'on appelle des *perturbations*. Nous n'essayerons pas de donner une idée des méthodes employées à cet effet; notre unique but est de tracer la marche générale suivie dans la solution d'une question si compliquée.

326. Mais le problème du système solaire ne serait pas résolu, lors même qu'on parviendrait à connaître suffisamment le mouvement des centres des corps qui composent le système tout entier : il resterait encore à déterminer leurs mouvements de rotation autour de leurs centres de gravité, et surtout celui de la terre, qui est pour l'homme d'un intérêt si particulier. Quoique cette question rentre dans celle qui a été traitée dans les Chapitres précédents, nous ne pouvons nous empêcher d'en dire quelques mots à propos du système du monde

C'est Newton qui s'est occupé le premier de cette importante question. Il a d'abord remarqué que, la terre n'étant pas parfaitement sphérique, la résultante des actions exercées sur elle par les différents points du soleil ne devait pas passer par son centre, et, par des considérations que nous ne pouvons développer, il a calculé l'effet produit

par le soleil sur la portion de la terre qui dépasse la sphère, dont le diamètre est la distance de ses deux pôles. Il est parvenu, malgré le peu de ressources que lui offrait l'état de la science, à ce grand résultat : que cette action devait produire sur l'axe de la terre un mouvement très-lent autour de l'axe de l'écliptique. Ainsi l'équateur terrestre, toujours également incliné sur le plan de l'écliptique, devait le couper suivant une ligne variable faisant une révolution entière dans un intervalle de plus de vingt-six mille années. Les points d'intersection de cette ligne avec la circonférence de l'écliptique étant les points équinoxiaux, il en résulterait pour ces points le mouvement régulier de *précession*, que l'on connaissait depuis si longtemps, et dont on ne soupçonnait même pas la cause.

Mais la loi de la précession des équinoxes est légèrement troublée par l'action de la lune, qui, par un effet semblable à celui du soleil sur le ménisque terrestre, produit sur l'axe de la terre une légère déviation qui s'accomplit dans une période d'environ dix-huit ans, et à laquelle on a donné le nom de *nutation*.

La théorie de Newton l'a ainsi conduit à l'explication des mouvements du globe terrestre, considéré dans son ensemble comme un corps de figure invariable; mais il lui a été donné encore de reconnaître les causes des mouvements périodiques qui ont lieu à la surface de l'Océan, et que Galilée lui-même n'avait pas soupçonnées. Il a reconnu que cette sorte de perturbation, que l'on nomme *flux* et *reflux*, était due à l'inégalité de l'attraction exercée sur les différents points de la terre, tant par le soleil que par la lune. Galilée, après avoir réfuté différentes explications de ce remarquable phénomène, en a donné lui-même une tout aussi inadmissible; mais, ne connaissant pas la gravitation universelle, il ne pouvait en trouver la vraie théorie.

Nous n'en dirons pas davantage sur le grand problème du mouvement d'un système de corps libre; pour les détails et les calculs qui s'y rapportent, nous ne pouvons que renvoyer aux Mémoires et aux Traités spéciaux de mécanique céleste.

Nous n'avons voulu que poser la question et en indiquer les grandes divisions : nous ne pouvons faire plus, d'après l'objet de cet Ouvrage; mais nous n'avons pas cru devoir faire moins.

RÉSUMÉ.

1. Dans cette Partie de notre Ouvrage, nous nous sommes proposé de donner un exemple de l'application de nos méthodes générales à la formation d'une science de raisonnement, dont les éléments dépendraient du système matériel au milieu duquel nous vivons.

Nous avons choisi à cet effet la propriété la plus simple et la plus générale de la matière, qui joue un rôle dans presque tous les phénomènes que nous offrent les corps, indépendamment de l'espèce particulière de la matière qui les compose, et se présente par conséquent la première à notre étude : cette propriété est la *mobilité*.

2. On reconnaît bientôt que le plus ordinairement le déplacement d'une portion quelconque de matière n'est pas spontané, et est dû à quelque chose en dehors d'elle; et cette observation est si générale, que, lors même que cette *cause* nous est cachée, nous sommes portés à admettre qu'elle existe. Ces causes de mouvement, que nous trouvons en nous-mêmes, et dont nous avons le sentiment toutes les fois que nous déplaçons un corps, nous les nommons des *forces*.

Une force met un corps libre en mouvement; mais plusieurs forces agissant sur un même corps, pourraient se détruire mutuellement, et le corps ne serait pas deplacé. Dans ce cas, on dit que ces forces sont en *équilibre*. L'objet que nous avons eu en vue a été l'étude de ces *mouvements* ou de ces *équilibres*; et l'ensemble de leurs lois, c'est-à-dire

des rapports nécessaires résultant de l'action des forces sur les corps, constitue la *science des forces*.

3. Pour qu'elle devienne une science de raisonnement, il faut, comme nous l'avons dit précédemment, connaître la *nature* des forces, c'est-à-dire connaître assez de propriétés des forces, pour que tous leurs effets en soient des conséquences nécessaires.

Ces propriétés fondamentales, qui renferment virtuellement la science entière, ne peuvent être obtenues que par l'observation des phénomènes; car le monde matériel aurait pu être soumis à des lois différentes de celles qui le régissent, et, par conséquent, ces lois ne peuvent être découvertes par l'intelligence de l'homme qui se placerait en dehors de ce monde réel.

C'est l'établissement de ces lois fondamentales qui a dû nous occuper d'abord.

4. Les forces sont de ces choses qui ne peuvent être définies, dire que ce sont des causes de mouvement, n'est pas réellement les définir, puisque ces causes n'étant pas connues d'avance, ce ne serait que substituer un mot à un autre. Mais, ce qui est essentiel, c'est que leur *égalité* et leur *addition* soient définies avec précision; et c'est par là que nous avons commencé.

Quant à l'établissement des principes fondamentaux, nous nous sommes d'abord occupé de ceux qui se rapportent à l'équilibre, parce qu'ils sont plus simples et moins nombreux que ceux qui se rapportent au mouvement, et nous avons exposé complétement la science de l'équilibre, avant de nous occuper de celle du mouvement, non-seulement parce que la première est plus facile, mais encore parce qu'elle est la base de la seconde.

5. Après avoir établi avec soin ces premiers principes,

nous avons commencé l'étude de l'équilibre par quelques cas simples; mais nous nous sommes bientôt elevé à la formule générale qui renferme virtuellement les conditions d'équilibre de tous les systèmes, et d'où on peut les tirer dans chaque cas particulier, par des procédés de calcul réguliers. Cette formule est l'expression d'un principe, entrevu par les géomètres qui ont précédé Lagrange, mais dont il a le premier compris toute l'importance. Il l'a admis d'abord, il est vrai, sans démonstration générale, et un grand nombre des conséquences qu'il en a tirées pouvant être démontrées directement en étaient une confirmation frappante; mais la rigueur scientifique exigeait une démonstration préalable de ce célèbre principe des *vitesses virtuelles*; et elle a été donnée d'abord par Fourier, puis par Lagrange lui-même, par Poinsot et quelques autres encore.

On peut donc regarder maintenant la science de l'équilibre comme rigoureusement établie, d'après les données premières que nous avons admises comme résultats de l'observation; elle est donc ainsi ce que nous avons nommé une *science de raisonnement*.

Il faut remarquer toutefois que nous ne nous sommes occupé que des systèmes de points, ou de corps solides, en nombre fini, liés entre eux, ou à des points fixés d'une manière quelconque. Nous n'avons pas considéré les systèmes composés d'une infinité de points, tous mobiles les uns par rapport aux autres, et formant ce qu'on appelle des liquides ou des gaz : nous en parlerons plus tard.

6. Après avoir constitué la science de l'équilibre des forces, nous sommes passé à l'étude des mouvements qu'elles peuvent produire.

Et d'abord, il faut bien remarquer que le mouvement, tel que nous l'avons défini, est toujours relatif. Le mouve-

ment absolu, généralement admis jusqu'ici, est une pure chimère fondée sur une autre chimère, celle d'un espace éternel et absolu, dont chaque point aurait une existence personnelle, et serait supposé dans un état d'immobilité. Et comme il est tout aussi impossible de dire ce qu'on entend par l'immobilité d'un point de cet espace, que par celle d'un point matériel quelconque, ce n'est que par un cercle vicieux que l'on arrive à croire que l'on a donné une définition du *repos* et du *mouvement*.

D'après cela, nous n'avons dû nous occuper que des mouvements relatifs des points, et tous les principes généraux que nous avons établis comme bases de la science du mouvement, sont entendus d'après cette conception.

7. La considération du mouvement en entraîne une autre, celle du *temps*. Nous avons encore eu à combattre à ce sujet une conception aussi chimérique que celle de l'espace, celle qui fait du temps un être réel, nécessaire, indépendant de toute création, comme l'espace, et sur lequel viennent s'échelonner les époques, comme les points sur une ligne indéfinie. Nous avons admis évidemment l'idée de succession comme résultat de notre expérience, mais nous n'avons pas dit qu'il existait un être dans lequel s'opérait cette succession. Néanmoins, pour la commodité du langage, nous avons parlé de temps égaux, ou dans un rapport quelconque, et par conséquent exprimables par des nombres, en définissant rigoureusement ce que nous entendions par là.

8. Il est encore une autre notion nécessaire à introduire dans la science du mouvement, et qui ne se trouve pas dans celle de l'équilibre : c'est la notion de la *masse*. L'expérience montre que la même force ne produit pas le même mouvement quand elle est appliquée à des corps

formés de la même substance, ayant des volumes différents, et par conséquent renfermant des quantités différentes de matière. Mais, comme on ne peut attacher aucun sens précis à la comparaison des quantités de matière renfermées dans des corps d'espèces différentes, et que notre objet n'est pas de tenir compte de la composition particulière des corps, mais seulement de la manière dont ils sont mis en mouvement par les forces, nous avons considéré comme identiques, sous ce rapport, deux corps qui, soumis à l'action d'une même force, prennent le même mouvement. On dit alors, non qu'ils renferment la même quantité de matière, mais qu'ils ont *la même masse*.

Lorsque deux corps proviennent de la réunion de corps ayant des masses égales, on dit que leurs masses sont dans le rapport des nombres respectifs de ces corps partiels. De là résulte l'expression de toutes les masses en nombres, en prenant pour terme de comparaison celle d'un volume déterminé d'une substance choisie arbitrairement.

Deux corps sollicités par des forces proportionnelles à leurs masses prennent un même mouvement, parce qu'en les décomposant en parties égales à leur commune mesure, toutes ces masses égales sont sollicitées par des forces égales. Et réciproquement, si le mouvement est le même, les forces sont dans le rapport des masses. De là résulte un moyen simple de comparer les masses. En effet, l'expérience a montré que tous les corps soumis à l'action seule de la pesanteur prennent des mouvements identiques, leurs masses sont donc proportionnelles aux forces qui les sollicitent, c'est-à-dire à leurs poids; et comme la comparaison des poids est très-facile, celle des masses le sera également, ainsi que leur expression en nombres.

9. Ces premières notions étant acquises, nous avons indiqué comment on a pu établir expérimentalement les

principes fondamentaux du mouvement produit par les forces.

Le premier consiste en ce que, dans un système dont tous les points ont des vitesses constantes egales et parallèles, si un de ces points vient à être sollicité par une certaine force, son mouvement, par rapport au système, sera le même que si le mouvement commun n'avait pas existé.

Une des premières conséquences de ce principe général est qu'une force constante, agissant d'une manière continue sur un point matériel partant du repos, lui donne un mouvement uniformément accéléré; et réciproquement.

10. Le second principe général consiste en ce que deux forces constantes, appliquées à des masses égales pendant un même temps, leur font acquérir des vitesses proportionnelles à ces forces.

De là résulte le rapport des vitesses acquises dans des intervalles quelconques de temps par des corps dont les masses sont dans un rapport quelconque, et sont sollicitées par des forces quelconques.

On déduit de là la mesure des forces constantes au moyen des vitesses qu'elles font acquérir à des masses connues.

La mesure des forces constantes conduit à celle des forces variables au moyen des considérations infinitésimales. Il suffit, en effet, de remarquer que, si l'on considère la vitesse produite par une force variable dans un temps infiniment petit, elle ne diffère que d'une quantité infiniment petite, par rapport à elle-même, de celle qui aurait lieu si cette force conservait pendant ce temps sa première valeur; d'où il suit que le rapport de celle-ci à une force constante choisie arbitrairement et appliquée à la même masse est la limite du rapport de la vitesse produite

par la première dans un temps infiniment petit à celle que produirait la force constante. On tire de là cette conséquence qu'une force variable quelconque, agissant dans le sens du mouvement rectiligne d'un point, est mesurée par le produit de la masse de ce point par la dérivée de sa vitesse par rapport au temps, en entendant qu'on a pris pour unité la force constante qui, dans l'unité de temps, fait acquérir à l'unité de masse une vitesse égale à l'unité.

11. Après avoir fait quelques applications de cette formule, nous sommes passé à l'étude du mouvement curviligne d'un point.

Galilée, le premier, a resolu la question du mouvement d'un point libre sollicité par une force constante en grandeur et en direction.

Hughens a donné sans démonstration des propositions importantes sur le mouvement d'un point assujetti à rester sur un cercle donné.

Enfin, Newton, en vue surtout des mouvements planétaires, s'est occupé du mouvement produit par une force dont la direction passe par un point fixe. Il en a démontré d'abord une importante propriété, connue sous le nom de *principe des aires*, et est parvenu ensuite à l'expression de la force au moyen de certains éléments infinitésimaux dépendant de la courbe que décrit le point. Cette grande découverte l'a conduit, comme nous le montrons plus tard, à celle de la gravitation universelle.

Mais il restait encore à donner l'expression générale de la force quand elle n'est assujettie à aucune restriction, et nous avons montré comment on y parvient en faisant usage du premier principe énoncé précédemment et de la théorie du mouvement rectiligne varié. On trouve ainsi que les composantes de la force accélératrice sont les dérivées secondes, par rapport au temps, des coordonnées respec-

tives du point considérés comme des fonctions du temps. Tous les problèmes sur le mouvement d'un point libre deviennent par là de simples questions de calcul différentiel ou intégral.

Nous avons examiné le cas où le point n'est pas entièrement libre, et est assujetti à rester sur une courbe ou une surface donnée. Nous avons montré comment ce cas se ramène au premier, en introduisant la force inconnue qui peut représenter l'action de la surface ou de la courbe. Le point peut alors être considéré comme libre, et les équations relatives à ce cas, jointes à celles de la courbe ou de la surface, déterminent le mouvement du point et les inconnues introduites.

12. Après avoir ainsi traité le cas du mouvement *absolu* d'un point, nous sommes passé à l'étude du mouvement *relatif*, ces deux expressions étant entendues comme nous l'avons suffisamment expliqué en parlant du mouvement en général.

Le problème que nous nous sommes proposé est celui-ci : *Étant donné le mouvement d'un système rigide, trouver, par rapport à ce système, le mouvement d'un point sollicité par une force donnée.*

Pour plus de simplicité, nous concevons trois axes liés invariablement au système; la position du point par rapport à ces axes détermine sa position relative au système, dont on peut alors faire abstraction, en ne conservant que ces axes, dont le mouvement sera regardé comme donné. Nous supposerons donc que les trois coordonnées de leur origine et les angles que leur direction font avec les axes fixes sont des fonctions connues du temps. Les trois équations qui ont lieu entre les coordonnées d'un point, par rapport aux axes fixes et aux axes mobiles, permet d'exprimer les unes, ainsi que leurs dérivées, au moyen des

autres, de leurs dérivées et du temps. Et comme les composantes de la force appliquée au point mobile sont données, les dérivées secondes de ses coordonnées, par rapport aux axes fixes, sont données, et l'on aura alors trois équations entre les dérivées secondes des coordonnées par rapport aux axes mobiles, ces coordonnées elles-mêmes et le temps. L'intégration de ces équations fera donc connaître ces coordonnées en fonction du temps, et par suite le mouvement relatif. Les constantes introduites se détermineront par les valeurs initiales de ces coordonnées et de leurs dérivées, et ces valeurs se déduiront de celles des coordonnées absolues, lesquelles sont connues par l'état initial du point.

13. Le mouvement du point, relativement aux axes mobiles, peut être conçu comme identique à un mouvement absolu rapporté à des axes fixes; il suffit de considérer à chaque instant un point dont les coordonnées auraient les mêmes valeurs par rapport à ceux-ci, que le point mobile a par rapport aux autres au même instant. Toutes les propriétés déduites des équations du mouvement par rapport à des axes fixes, pourront donc être appliquées au mouvement relatif; et nous avons fait l'application de cette remarque au principe des aires et à celui des forces vives.

14. On appelle *force relative* du point celle qui produirait, par rapport à des axes fixes, le mouvement identique à son mouvement relatif. Sa valeur peut s'exprimer au moyen de la *force absolue* appliquée réellement au point, et de certaines autres forces fictives. Le principe général sur lequel repose cette conception est dû à Newton, et c'est lui qui, le premier, a ramené la théorie du mouvement relatif de deux points mobiles à celle du mouvement d'un point par rapport à un point fixe.

15. Une des plus grandes questions de mouvement est celle du système solaire, et nous ne pouvions nous dispenser de nous en occuper, surtout parce que nous y avons trouvé l'occasion de montrer comment une *science d'observation* a pu devenir une *science de raisonnement*.

Nous avons pensé qu'il était bon d'exposer la marche par laquelle on a pu déduire de l'observation des astres des faits généraux assez constants pour pouvoir être regardés, au moins dans une première approximation, comme des lois immuables des mouvements de ces corps. Ces lois, découvertes par Kepler, ont été le point de départ de Newton. La théorie qu'il avait créée, surtout pour l'appliquer à ces grands phénomènes, lui a fait connaître les forces auxquelles ils étaient dus, et ces forces étant déterminées, toutes les lois du système du monde en découlaient.

C'est ainsi que Newton a élevé au rang de *science de raisonnement* l'Astronomie, qui n'était avant lui qu'une *science d'observation*.

16. Mais l'Astronomie étant ainsi ramenée à n'être qu'une simple branche de la science des forces, ses limites étaient celles de cette dernière, qui sont elles-mêmes celles de la science des nombres et de l'étendue. Newton avait ébauché les solutions des grands problèmes de la rotation des corps célestes, et des perturbations de leurs mouvements; elles ont été bien avancées par ses successeurs, mais elles laissent encore beaucoup à désirer. Il n'entrait pas dans notre objet de nous occuper de ces questions, où il s'agit principalement du perfectionnement des méthodes de calcul.

17. Après avoir exposé la théorie du mouvement d'un point matériel, nous avons traité la question générale du mouvement d'un système quelconque de points liés entre

eux d'une manière quelconque, et sollicités par des forces quelconques. Ce grand problème se ramène immédiatement à celui de l'équilibre au moyen d'un principe entrevu par Jacques Bernoulli à propos du pendule composé, et généralisé par d'Alembert, dont il porte le nom.

Cet équilibre est celui du système même considéré comme sollicité par les forces qui lui sont appliquées, et par les forces d'inertie développées à chaque instant par tous les points matériels qui le composent. Cette considération donne autant d'équations qu'il y a de quantités à déterminer en fonction du temps. De cette manière, le problème général du mouvement est ramené à un problème de calcul, et la science des forces rentre complétement dans les sciences de raisonnement précédemment étudiées.

18. Nous aurions pu nous arrêter là, puisque tous les principes étaient établis, et que la science était ramenée à de simples questions de calcul, mais nous avons cru devoir présenter quelques conséquences générales de la formule qui renferme virtuellement toute la science du mouvement. Nous avons démontré les théorèmes sur le mouvement du centre de gravité, et sur les aires décrites dans le cas d'un système libre quelconque, sur les forces vives et sur la propriété de la moindre action dans des cas plus restreints. Enfin, en vue de l'application au système du monde, nous nous sommes occupé sommairement du mouvement d'un corps solide libre ou lié à un axe fixe ou à un point fixe, et du mouvement d'un système de points libres soumis à leurs actions mutuelles.

Nous croyons avoir accompli la tâche que nous nous étions imposée. Nous voulions fonder la science générale des forces rigoureusement définies et données par leur point d'application, leur direction et leur intensité. Nous

devions donc nous interdire l'étude de l'équilibre et du mouvement des liquides et des gaz, ainsi que des petits mouvements inférieurs des molécules des corps qu'on appelle *solides*. Ces phénomènes sont produits par des forces en nombre infini dont les intensités et même les directions ne sont pas données, et sur lesquelles il faut faire des hypothèses si l'on veut les soumettre au calcul. Peut-être nous en occuperons-nous plus tard, en essayant d'en indiquer le véritable caractère; mais, dans cet Ouvrage, dont l'objet était l'exposition rigoureuse d'une science de raisonnement, nous avons cru ne devoir admettre que des données simples, et immédiatement vérifiables au moyen d'expériences directes et précises.

FIN.

